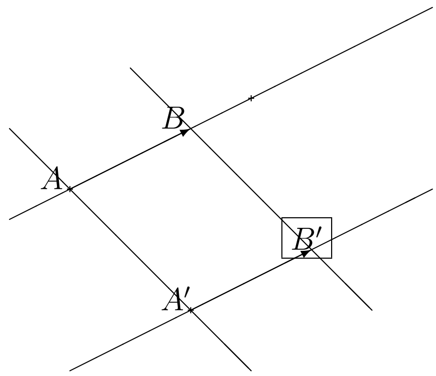
Algebra - Algebra lineare, 05.03.08

1. **Vettori applicati nello spazio.**

   I concetti di segmento orientato, di equivalenza di segmenti orientati, di vettore applicato in un punto, di addizione di due vettori applicati in uno stesso punto, di moltiplicazione di un vettore applicato per uno scalare si estendono dal caso del piano al caso dello spazio semplicemente sostituendo appunto alla parola "piano" la parola "spazio". In realta', fino a che si considerano solo uno o due vettori non ci si puo' accorgere di essere nel piano o nello spazio.

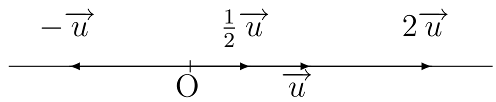
   Dunque si ha la sequenza di concetti:

   - segmenti orientati nello spazio; equivalenza di segmenti orientati; traslazione di un segmento orientato AB nel un segmento orientato $A'B'$ avente primo estremo A' ed equivalente ad AB; vettori dello spazio applicati in un punto; vettore nullo; opposto di un vettore;

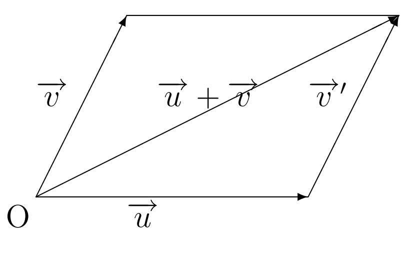


   - moltiplicazione di un numero reale per un vettore applicato; Si osserva che

     i multipli scalari $\overrightarrow{v}r$ di un vettore applicato non nullo $\overrightarrow{v}$ descrivono la retta su cui giace $\overrightarrow{v}$.



   - addizione di due vettori applicati in uno stesso punto;



- combinazione lineare di vettori applicati in uno stesso punto. Si osserva che

    le combinazioni lineari $\overrightarrow{u}r + \overrightarrow{v}s$ di due vettori $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, applicati in uno stesso punto e non allineati, descrivono il piano su cui stanno $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.

Fissato nello spazio un punto O, abbiamo cosi' definito due operazioni sui vettori dello spazio applicati in O: l'addizione di due vettori applicati in O, e la moltiplicazione di un vettore applicato in O per uno scalare reale. Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprieta' del calcolo letterale.

2. **Interpretazione geometrica delle operazioni su $\mathbb{R}^3$**

Fissati nello spazio

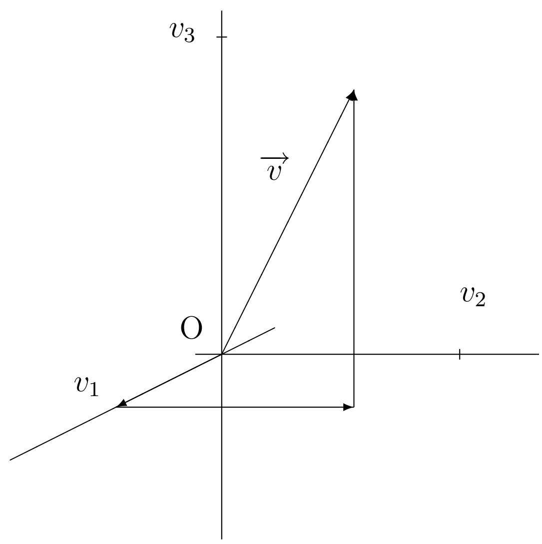
> un punto O, una prima retta per O con un punto U_1 diverso da O, una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto U_2 diverso da O, ed una terza retta per O, ortogonale alle prime due, con un punto U_3 diverso da O,

c'e' un modo naturale di associare a ciascuna terna ordinata di numeri reali un punto dello spazio, in modo che

> alla terna $(0, 0, 0)$ corrisponda l'origine O, alla terna $(1, 0, 0)$ corrisponda il punto U_1, alla terna $(0, 1, 0)$ corrisponda il punto U_2, e alla terna $(0, 0, 1)$ corrisponda il punto U_3.

Ciascun punto dello spazio si ottiene in corrispondenza di una ed una sola terna (p, q, r) di numeri reali, che vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}^3$ e i punti dello spazio. Spesso identificheremo un punto dello spazio col vettore applicato in O avente secondo estremo in quel punto. Alla generica terna $v = [v_i]_{i=1}^3$ corrisponde un vettore $\overrightarrow{v}$ che si puo' pensare come lo spostamento di v_1 unita' lungo il primo asse, di v_2 unita' lungo il secondo asse, di v_3 unita' lungo il terzo asse, applicato all'origine O.



L'addizione di terne di numeri reali viene allora rappresentata dall'addizione di vettori applicati in O. Precisamente, se alle due terne $a = [a_i]_{i=1}^3$, $b = [b_i]_{i=1}^3$, corrispondono i vettori applicati $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, allora alla terna somma

$a + b = [a_i + b_i]_{i=1}^3$

corrisponde il vettore applicato somma

$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

La moltiplicazione di una terna di numeri reali per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di un vettore applicato per un numero reale. Precisamente, se alla terna $b = [b_i]_{i=1}^3$ corrisponde il vettore applicato $\overrightarrow{b}$, e se r e' un numero reale, allora alla terna prodotto

$br = [b_i r]_{i=1}^3$

corrisponde il vettore applicato prodotto

$\overrightarrow{b}\, r$.

D'ora in poi identificheremo ciascuna terna ordinata di numeri reali col corrispondente vettore applicato in O, ed useremo come simboli lettere minuscole semplici, come a al posto di $\overrightarrow{a}$.

3. **Interpretazione geometrica dei sistemi di tre equazioni lineari.**

I sistemi di tre equazioni lineari possono essere interpretati geometricamente come impostazione di problemi di rappresentazione di un vettore come combinazione lineare altri vettori, nello spazio.

Precisamente, il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3p}x_p &= b_3 \end{cases}$$

puo' essere rappresentato sinteticamente nella forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

dove $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Abbiamo cosi' espresso il generico sistema lineare di tre equazioni lineari nelle p incognite $x_1, x_2, \ldots, x_p$ come la posizione del problema di determinare le combinazioni lineari dei vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ il cui risultato e' il vettore b.

Di seguito, discutiamo geometricamente i sistemi di tre equazioni lineari; per brevita', supporremo che le colonne coefficienti a_j siano non nulle. La discussione sara' svolta "in generale" (cfr. Lezione I).

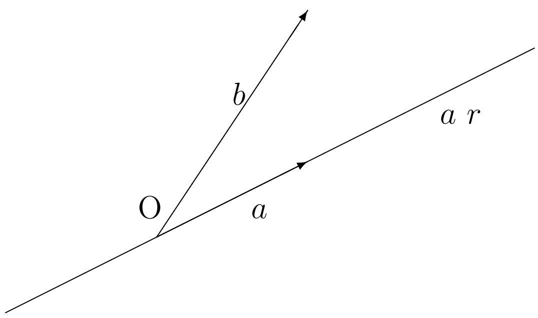
- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in una incognita x

  $ax = b, \qquad a, b \in \mathbb{R}^3,$

e supponiamo che il vettore a sia diverso dal vettore nullo. Allora i multipli scalari

ax

descrivono la retta su cui sta a. Il sistema ha soluzione se e solo se il vettore b sta su questa retta e in tal caso il sistema e' determinato.



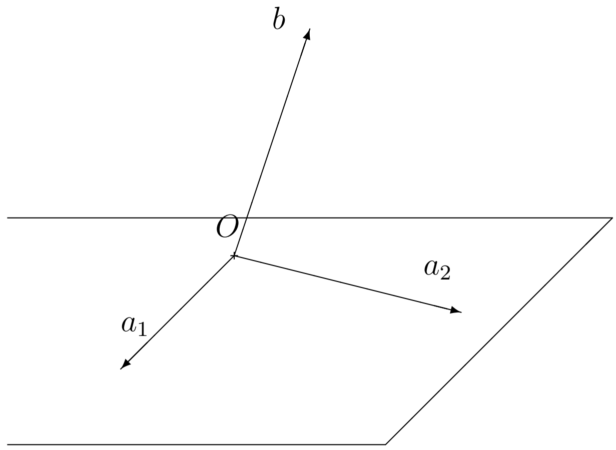
- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in due incognite x_1, x_2

  $a_1x_1 + a_2x_2 = b, \qquad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}^3$

  e supponiamo che i vettori a_1 e a_2 non siano allineati. Allora le combinazioni lineari

  $a_1x_1 + a_2x_2$

  descrivono il piano su cui stanno a_1 e a_2. Il sistema ha soluzione se e solo se il vettore b sta su questo piano e in tal caso il sistema e' determinato.



- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in tre incognite x_1, x_2, x_3

  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \qquad a_j, b \in \mathbb{R}^3$

  e supponiamo che i vettori a_1, a_2, a_3 non siano complanari. Allora le combinazioni lineari

  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$

  descrivono l'intero spazio, ed ogni vettore dello spazio viene ottenuto una ed una sola volta. Il sistema e' sempre determinato.

- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4

  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b, \qquad a_j, b \in \mathbb{R}^3$

  e supponiamo che i vettori a_1, a_2, a_3 non siano complanari. Allora le combinazioni lineari

  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$

  descrivono l'intero spazio, ed ogni vettore dello spazio viene ottenuto piu' volte. Il sistema e' sempre indeterminato.

4. **Sistemi di riferimento nello spazio.**

   Consideriamo tre vettori u, v, w, applicati in O, che non siano contenuti in uno stesso piano. Allora, combinando linearmente questi vettori possiamo ottenere tutti i vettori dello spazio applicati in O.

   Infatti, per ciascun vettore b applicato in O,

   - possiamo tracciare dal secondo estremo di b la retta parallela alla retta individuata da w e intersecarla col piano individuato da u, v, ottenendo un vettore che possiamo esprimere nella forma

     $$ru + sv,$$

     per opportuni scalari r, s;
   - possiamo prendere dal secondo estremo di b il piano parallelo al piano individuato da u, v e intersecarlo con la retta individuata da w, ottenendo un vettore che possiamo esprimere nella forma

     $$tw,$$

     per un opportuno scalare t.

   Possiamo allora esprimere il vettore b nella forma

   $$b = ru + sv + tw.$$

   In realta', ciascun vettore dello spazio si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori u, v, w.

   Possiamo dire che i vettori u, v, w formano un sistema di riferimento per lo spazio, e che r, s, t sono le *coordinate* del vettore b in questo sistema di riferimento.

5. **Basi di $\mathbb{R}^n$.**

   L'estensione del concetto di sistema di riferimento allo spazio $\mathbb{R}^n$ porta alla seguente

   Definizione 1. *Diciamo che i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ dello spazio $\mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se ogni vettore b di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

   $$a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots + a_pr_p = b$$

   dei vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$; in tal caso, diciamo che i coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sono le coordinate di b rispetto a questa base.

Si noti che l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b, \qquad a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

equivale al sistema lineare

$$Ax = b, \qquad x \in \mathbb{R}^p, \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

di n equazioni in p incognite, dove

$A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_p\ ]$

e' la matrice ottenuta affiancando le colonne $a_1, a_2, \ldots, a_p$ e $x = [x_i]_{i=1}^p$ e' la colonna delle p incognite. Dunque possiamo dire che i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se tutti i sistemi lineari

$$Ax = b$$

sono determinati.

Per $p = n$, cio' capita se e solo se la matrice A e' non singolare; in tal caso, la matrice A e' invertibile e puo' essere usata per determinare le coordiante del generico vettore b di $\mathbb{R}^n$ rispetto a questa base:

$$x = A^{-1}b.$$

6. **Insiemi linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$.**

Nello spazio, consideriamo:

- un vettore non nullo;
- due vettori non allineati;
- tre vettori non complanari.

In ciascun caso, abbiamo un insieme di vettori con la proprieta'

> una combinazione lineare dei vettori dell'insieme e' uguale al vettore nullo solo se tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

Questa considerazione suggerisce la seguente

Definizione 2. *Diciamo che i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ dello spazio $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se l'uguaglianza*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0, \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

e' soddisfatta solo per $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$. In caso contrario, diciamo che i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sono linearmente dipendenti.

Si noti che l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0, \qquad a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

equivale al sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^p, \quad 0 \in \mathbb{R}^n,$$

di n equazioni in p incognite, dove

$A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_p\ ]$

e' la matrice ottenuta affiancando le colonne $a_1, a_2, \ldots, a_p$ e $x = [x_i]_{i=1}^p$ e' la colonna delle p incognite. Dunque possiamo dire che i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0$$

ha solo la soluzione banale $x = 0$.

Per $p = n$, dai primi risultati sui sistemi lineari (cfr. Lezione III), si ha che il sistema lineare omogeneo

$$Ax = 0$$

ha solo la soluzione banale se e solo se la matrice A e' non singolare; a sua volta, per quanto visto nel punto precedente, cio' vale se e solo se i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formano una base dello spazio $\mathbb{R}^n$.

7. Per $p = 1$, si ha che un vettore

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

dello spazio $\mathbb{R}^n$ e' linearmente indipendente se e solo se $a_1 \neq 0$, e a sua volta cio' capita se e solo se

$$a_1^T a = [a_{11}\ \ldots\ a_{n1}] \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}^2 + \cdots + a_{n1}^2 \neq 0.$$

In generale, si ha

Proposizione 1. *Siano $a_1, a_2, \ldots, a_p$ vettori dello spazio $\mathbb{R}^n$, e sia $A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_p\ ]$ la matrice di tipo $n \times p$ in cui compaiono come colonne. Se i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sono linearmente indipendenti, allora la matrice quadrata di ordine p*

$$A^T A$$

e' invertibile.

Dimostrazione.

Proviamo che il sistema lineare omogeneo di p equazioni in p incognite

$$\left(A^T A\right) x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^p, \quad 0 \in \mathbb{R}^p,$$

ha solo la soluzione banale $x = 0$. Infatti, premoltiplicando entrambi i membri per il vettore riga x^T si ha l'uguaglianza

$$x^T \left(A^T A\right) x = 0,$$

che puo' essere riscritta come

$$(Ax)^T (Ax) = 0,$$

che vale se e solo se

$$Ax = 0, \qquad 0 \in \mathbb{R}^n,$$

che a sua volta, per l'indipendenza delle colonne di A vale solo se $x = 0$.

$\square$.