Algebra - Algebra lineare, 07.03.08

1. Sia dato un insieme
$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$$
di vettori v_i dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

   - Si dice che S e' una *base di* $\mathbb{R}^n$ se e solo se ogni vettore b di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo
   $$v_1x_1 + \cdots + v_px_p = b$$
   come combinazione lineare dei vettori di S.
   Ad esempio, nello spazio $\mathbb{R}^3$, riferito ad un sistema di assi cartesiani con origine in un punto O, si ha che tre vettori applicati in O formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se non sono complanari.
   - Si dice che S e' *linearmente indipendente* se e solo se il vettore nullo 0_n di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo
   $$v_1x_1 + \cdots + v_px_p = 0_n$$
   come combinazione lineare dei vettori di S : prendendo tutti i coefficienti nulli: $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
   Ad esempio, nello spazio $\mathbb{R}^3$, riferito ad un sistema di assi cartesiani con origine in un punto O, si ha che: un vettore e' linearmente indipendente se e solo se non e' nullo; due vettori sono linearmente indipendenti se e solo se non sono allineati; tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se non sono complanari; quattro o piu' vettori sono sempre linearmente dipendenti.
   - si dice che S *genera* $\mathbb{R}^n$ se e solo se ogni vettore b di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in almeno un modo
   $$v_1x_1 + \cdots + v_px_p = b$$
   come combinazione lineare dei vettori di S.
   Ad esempio, nello spazio $\mathbb{R}^3$, riferito ad un sistema di assi cartesiani con origine in un punto O, si ha che: uno o due vettori non possono generare $\mathbb{R}^3$; tre o piu' vettori generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se non sono complanari.

   La definizione di indipendenza lineare si puo' dare equivalentemente nella forma

   - si dice che S e' linearmente indipendente se e solo se ogni vettore b di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in al piu' un modo
   $$v_1x_1 + \cdots + v_px_p = b$$
   come combinazione lineare dei vettori di S.

   Questa equivalenza rende evidente la seguente

   Proposizione 1. *Un insieme* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *e' una base di* $\mathbb{R}^n$ *se e solo se*

- *S e' linearmente indipendente;*
- *S genera $\mathbb{R}^n$.*

Verifichiamo ora l'equivalenza delle due definizioni dell'indipendenza lineare.

Da un lato, se ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in al piu' un modo come combinazione lineare dei vettori di S, allora in particolare il vettore nullo 0_n di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in al piu' un modo come combinazione lineare dei vettori di S; dunque

$v_1 0 + \cdots + v_n 0 = 0_n$

e' l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare dei vettori di S.

Dall'altro lato, supponiamo che

$v_1 0 + \cdots + v_n 0 = 0_n$

sia l'unica scrittura del vettore nullo 0_n di $\mathbb{R}^n$ come combinazione lineare dei vettori di S, e mostriamo che ogni vettore b di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in al piu' un modo come combinazione lineare dei vettori di S. Consideriamo due scritture

$v_1 x_1 + \cdots + v_p x_p = b,$

$v_1 y_1 + \cdots + v_p y_p = b,$

di b come combinazione lineare dei vettori di S. Sottraendo membro a membro otteniamo

$v_1(x_1 - y_1) + \cdots + v_p(x_p - y_p) = O_n,$

da cui deduciamo

$x_1 - y_1 = 0; \ldots ; x_p - y_p = O,$

cioe'

$x_1 = y_1; \ldots ; x_p = y_p.$

2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, abbiamo visto che uno e due vettori non possono generare $\mathbb{R}^3$, mentre quattro o piu' vettori non possono essere linearmente indipendenti, e cosi' tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ sono formate esattamente da tre vettori.

   Ora, questi fatti si estendono:

   Proposizione 2. *Sia dato un insieme $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ di vettori v_i dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.*

   - *se $p > n$, allora S e' linearmente dipendente;*
   - *se $p < n$, allora S non genera $\mathbb{R}^n$,*

   cosi' tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ sono formate esattamente da n vettori.

   Questo e' il significato profondo della frase "lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha domensione n."

   La prima affermazione della proposizione deriva dal fatto che un sistema lineare omogeneo di n equazioni in p incognite, con $p > n$, e' sempre indeterminato. La seconda affermazione si puo' dedurre dalla prima.