Algebra/Algebra Lineare, 10.03.08

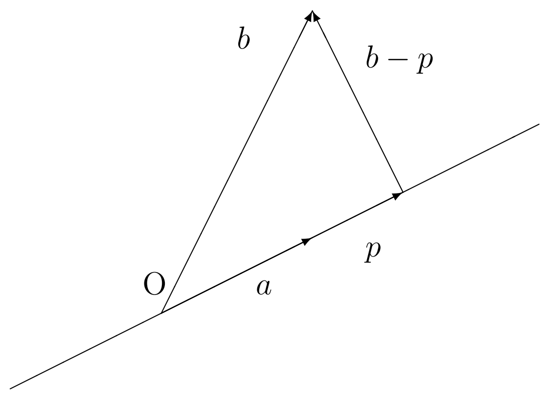
1. **Distanza di un punto da una retta, nel piano.**

   Svolgiamo ora un semplice esercizio di geometria analitica nel piano: determinare la distanza di un punto da una retta. Il modo nel quale risolveremo questo problema e' particolarmente significativo, perche' conduce senza sforzo alla risoluzione di problemi molto piu' generali in $\mathbb{R}^n$, la quale a sua volta avra' importanti applicazioni alla risoluzione approssimata di sistemi lineari impossibili.

   Problema. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sono dati i vettori

   $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$

   Determinare la distanza fra il punto finale di b e la retta generata da a.

   Per "distanza di un punto da una retta" si intende il numero reale ottenuto considerando le distanze tra il punto esterno e i punti della retta e prendendo l'estremo inferiore di queste distanze.

   Si osserva che fra i punti della retta ce n'e' uno ed uno solo che ha dal punto esterno distanza minima, ed e' il punto proiezione ortogonale del punto esterno sulla retta.

   Cerchiamo dunque un vettore p che soddisfi le due condizioni:

   p allineato con a
   $b - p$ ortogonale ad a,

   che algebricamente si esprimono nella forma

   $$\begin{aligned} p &= a\overline{x}, \qquad \overline{x} \in \mathbb{R} \\ a^T(b-p) &= 0, \end{aligned}$$

   dove $\overline{x}$ e' uno scalare incognito.

   Sostituendo l'espressione di p in funzione di $\overline{x}$ nella seconda condizione si ha

   $$a^T(b - a\overline{x}) = 0, \quad cioe' \quad a^T a\,\overline{x} = a^T b.$$

Ora, questa e' un'equazione lineare di primo grado nell'incognita $\overline{x}$, la quale compare con coefficiente $a^T a \neq 0$; si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$\overline{x} = \frac{a^T b}{a^T a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = a\overline{x} = a\frac{a^T b}{a^T a}.$$

Nel nostro caso, si ha

$\overline{x} = \frac{a^T b}{a^T a} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{8}{5},$

da cui

$p = a\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{8}{5}.$

La distanza del punto esterno dalla retta e' allora data da

$\|b - p\| = \| \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{8}{5} \| = \| \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \| = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$

2. **Distanza di un punto da una 'retta', in $\mathbb{R}^n$.**

Nello spazio $\mathbb{R}^n$, dati due vettori

$a \neq 0, \qquad b,$

ci si puo' porre il problema di determinare la distanza fra b e la 'retta'

$\{ax;\ x \in \mathbb{R}\}$

generata da a.

Per "distanza di un punto da una retta" si intende il numero reale ottenuto considerando le distanze tra il punto esterno e i punti della retta e prendendo l'estremo inferiore di queste distanze.

Si puo' provare che fra i punti della retta c'e' uno ed un solo punto p che ha dal punto esterno b distanza minima. Questo punto viene detto punto 'proiezione ortogonale del punto b sulla retta', ed e' caratterizzato dalle condizioni

$p \in \{ax;\ x \in \mathbb{R}\}$
$(b - p) \perp a,$

che si esprimono nella forma

$$\begin{aligned} p = a\overline{x}, &\qquad \overline{x} \in \mathbb{R} \\ a^T(b - p) = 0, & \end{aligned}$$

dove $\overline{x}$ e' uno scalare incognito.

Sotto la condizione $a \neq 0$, si ha una sola soluzione:

$$\overline{x} = \frac{a^T b}{a^T a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = a\overline{x} = a\frac{a^T b}{a^T a}.$$

La distanza del punto b dalla retta generata da a e' allora data da

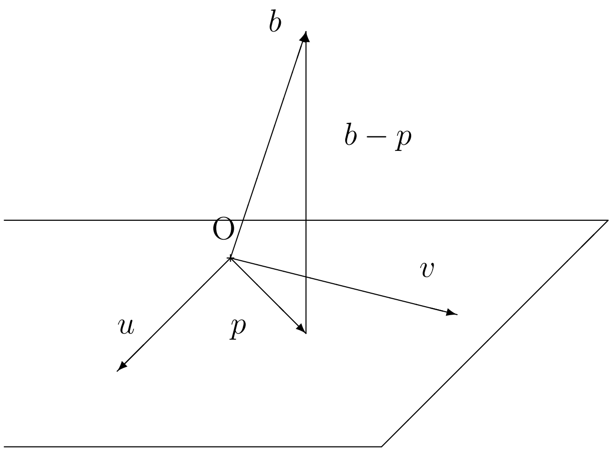
$$\|b - p\| = \|b - a\frac{a^T b}{a^T a}\|.$$

3. **Distanza di un punto da un piano, nello spazio.**

Problema. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sono dati i vettori

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare la distanza fra il punto finale di b e il piano generato da u, v.



Per "distanza di un punto da un piano" si intende il numero reale ottenuto considerando le distanze tra il punto esterno e i punti del piano e prendendo l'estremo inferiore di queste distanze.

Si osserva che fra i punti del piano ce n'e' uno che ha dal punto esterno distanza minima, ed e' il punto proiezione ortogonale del punto esterno sul piano.

Stiamo dunque cercando un vettore p che soddisfi le due condizioni:

p complanare con u, v
$b - p$ ortogonale ad u, v,

che si esprimono algebricamente nella forma

$$\begin{aligned} p &= u\overline{x} + v\overline{y}, \qquad \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R} \\ u^T(b-p) &= 0, \\ v^T(b-p) &= 0, \end{aligned}$$

e, posto

$$[u\ v] = U, \qquad \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \overline{z},$$

nella forma sintetica

$$\begin{aligned} p &= U\overline{z}, \qquad \overline{z} \in \mathbb{R}^2 \\ U^T(b-p) &= 0, \qquad 0 \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Gli scalari incogniti $\overline{x}, \overline{y}$ sono i coefficienti con cui combinare linearmente i vettori u, v che generano il piano per ottenere il vettore proiezione p.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di $\overline{z}$ nella seconda condizione si ha

$$U^T(b - U\overline{z}) = 0, \quad cioe' \quad U^TU\ \overline{z} = U^Tb.$$

Ora, questo e' un sistema lineare di due equazioni in due incognite; le colonne di U sono linearmente indipendenti, e dunque la matrice U^TU e' invertibile (cfr. Lezione X); si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$\overline{z} = \left(U^TU\right)^{-1} U^Tb,$$

dalla quale si ottiene

$$p = U\overline{z} = U\left(U^TU\right)^{-1} U^Tb.$$

Nel nostro caso, si ha

$$\begin{aligned} \overline{z} = \left(U^TU\right)^{-1} U^Tb &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 17 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 79 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$p = a\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{1}{81} = \begin{bmatrix} 79 \\ 20 \\ 163 \end{bmatrix} \frac{1}{81}.$$

La distanza del punto esterno dalla retta e' allora data da

$$\|b-p\| = \| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 79 \\ 20 \\ 163 \end{bmatrix} \tfrac{1}{81} \| = \| \begin{bmatrix} 2 \\ 61 \\ -82 \end{bmatrix} \tfrac{1}{81} \| = \tfrac{\sqrt{10289}}{81} \cong 1.25.$$

4. **Distanza di un punto da un sottospazio, in $\mathbb{R}^n$.**

Nello spazio $\mathbb{R}^n$, dati i vettori

$u_1, \ldots, u_m$, *linearmente indipendenti*, *e* b,

si puo' considerare il problema di determinare la distanza fra b e l'insieme

$\{u_1x_1 + \cdots + u_mx_m;\ x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\}$

delle combinazioni lineari dei vettori $u_1, \dots, u_m$, che diciamo in breve il "sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato da $u_1, \dots, u_m$."

Per "distanza di un punto da un sottospazio" si intende il numero reale ottenuto considerando le distanze tra il punto esterno e i punti del sottospazio e prendendo l'estremo inferiore di queste distanze.

Si puo' provare che fra i punti del sottospazio c'e' uno ed un solo punto p che ha dal punto b distanza minima. Questo punto viene detto "proiezione ortogonale del punto b sul sottospazio", ed e' caratterizzato dalle condizioni

$$\begin{aligned} p = u_1\overline{x}_1 + \cdots + u_m\overline{x}_m, &\qquad \overline{x}_i \in \mathbb{R} \\ u_1^T(b-p) = 0, & \\ \vdots & \\ u_m^T(b-p) = 0, & \end{aligned}$$

cioe', posto

$$[u_1 \ \dots \ u_m] = U, \qquad \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_m \end{bmatrix} = \overline{z},$$

dalle condizioni

$$\begin{aligned} p = U\overline{z}, &\qquad \overline{z} \in \mathbb{R}^m \\ U^T(b-p) = 0, &\qquad 0 \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di p in funzione di $\overline{z}$ nella seconda condizione si ha

$$U^T(b - U\overline{z}) = 0, \quad cioe' \quad U^TU\ \overline{z} = U^Tb.$$

Ora, questo e' un sistema lineare di m equazioni in m incognite; le colonne di U sono linearmente indipendenti, e dunque la matrice U^TU e' invertibile (cfr. Lezione X); si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$\overline{z} = \left(U^TU\right)^{-1} U^Tb,$$

dalla quale si ottiene

$$p = U\overline{z} = U\left(U^TU\right)^{-1} U^Tb.$$

La distanza del punto b dal sottospazio generato dai vettori $u_1, \dots, u_m$ e' allora data da

$$\|b-p\| = \|b - U\left(U^TU\right)^{-1} U^Tb\|.$$