

Matematica II, 03.12.08

1. Sia n un intero positivo fissato. Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n e' l'insieme delle n -ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

munito dell'operazione di addizione di due n -ple, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

e dell'operazione di moltiplicazione di una n -pla per un numero reale, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} a_1 r \\ \vdots \\ a_n r \end{bmatrix}.$$

Penseremo ciascuna n -pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole a, b, \dots, v, \dots . La n -pla

$$0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

viene detta *vettore nullo* di \mathbb{R}^n .

Al posto di n -pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di numero reale useremo il termine *scalare*.

Data una sequenza di un certo numero di vettori $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, r_2, \dots, r_p \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_p r_p \in \mathbb{R}^n,$$

detto *combinazione lineare* dei vettori a_1, a_2, \dots, a_p con coefficienti r_1, r_2, \dots, r_p .

2. Ogni vettore

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

dello spazio vettoriale \mathbb{R}^n si puo' scomporre nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
a &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} a_2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_n \\
&= e_1 a_1 + e_2 a_2 + \cdots + e_n a_n,
\end{aligned}$$

dove

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'insieme di questi vettori viene detto *base canonica* di \mathbb{R}^n . Abbiamo dunque che ogni vettore a di \mathbb{R}^n si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori e_1, e_2, \dots, e_n della base canonica, e che il coefficiente di e_i e' la componente i -ma di a .

3. Possiamo usare le operazioni sui vettori per dare una rappresentazione sintetica del generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

di n equazioni in p incognite.

Infatti, le n uguaglianze di cui consiste il sistema possono essere sintetizzate nell'unica uguaglianza

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

che a sua volta puo' essere scritta nella forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix} x_p = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

e può essere rappresentata sinteticamente nella forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

dove

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, p, \quad e \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

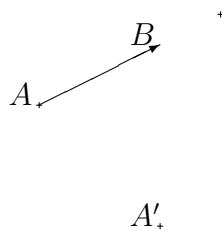
Possiamo dunque dire che una p -pla (r_1, r_2, \dots, r_p) di numeri reali è una soluzione del sistema lineare se e solo se la combinazione lineare con coefficienti r_1, r_2, \dots, r_p delle colonne dei coefficienti delle incognite è uguale alla colonna termine noto.

4. Vettori applicati nel piano.

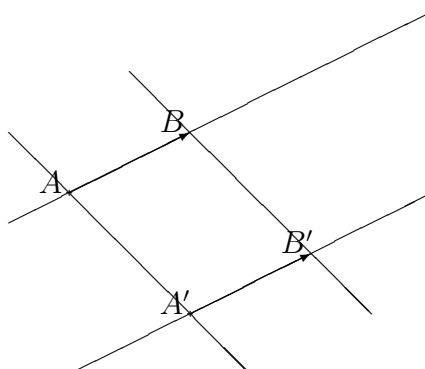
Un segmento per il quale si sia scelto un verso di percorrenza viene detto *segmento orientato*; il segmento orientato di primo estremo A e secondo estremo B viene indicato con AB.

Consideriamo i segmenti orientati nel piano. Diciamo che due segmenti orientati sono equivalenti quando hanno la stessa direzione, lunghezza, e verso.

Fissato un segmento orientato AB, per ogni punto A' del piano esiste uno ed un solo segmento orientato A'B' con primo estremo A' che sia equivalente ad AB.



Supponiamo per semplicità che A' non sia sulla retta individuata da A e B. Allora possiamo costruire B' intersecando la retta per A' parallela alla retta per A, B con la retta per B parallela alla retta per A, A'.

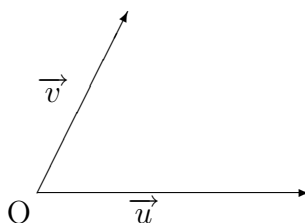


Diciamo che abbiamo "trasmesso" il segmento orientato AB nel segmento orientato $A'B'$.

5. D'ora innanzi, al posto dell'espressione "segmento orientato con primo estremo in A " diremo "vettore applicato in A "; indicheremo i vettori applicati con simboli come \vec{u}, \vec{v}, \dots

Sia O un punto fissato nel piano.

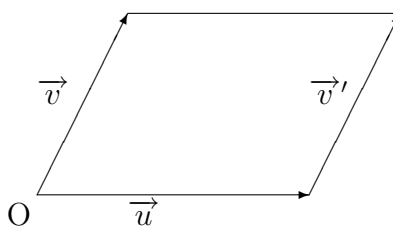
Dati due vettori \vec{u}, \vec{v} applicati in O ,



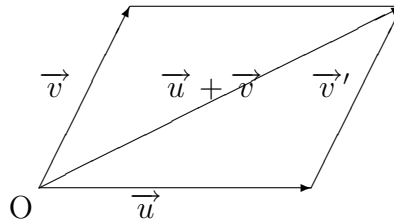
definiamo il vettore

$$\vec{u} + \vec{v}$$

loro somma come il vettore applicato in O costruito come segue: prima trasliamo il vettore \vec{v} in modo che il suo primo estremo coincida col secondo estremo di \vec{u} , ottenendo così un nuovo vettore \vec{v}'



poi consideriamo il vettore applicato in O avente come secondo estremo il secondo estremo di \vec{v}' :



In altri termini, $\vec{u} + \vec{v}$ e' la diagonale, uscente da O, del parallelogramma che ammette \vec{u} e \vec{v} come lati consecutivi.

Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u},$$

e associativa:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}),$$

per ogni terna di vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore i cui estremi coincidono con il punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo

$$\vec{0}.$$

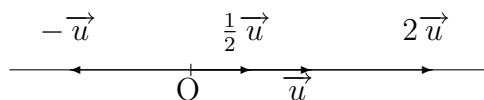
La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni \vec{v} , il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con

$$-\vec{v}.$$

6. Dato un vettore \vec{v} applicato in O, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per \vec{v} : per un numero intero n , si pone

$$n\vec{v} = \begin{cases} \vec{v} + \vec{v} + \dots + \vec{v} & n \text{ volte} \text{ per } n = 1, 2, \dots \\ \vec{0} & \text{per } n = 0 \\ (-\vec{v}) + (-\vec{v}) + \dots + (-\vec{v}) & -n \text{ volte} \text{ per } n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo così definito due operazioni: l'addizione di due vettori applicati in O , che fornisce un vettore applicato in O , e la moltiplicazione di un vettore applicato in O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore applicato in O .

Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprietà del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, né moltiplicare vettori per vettori.

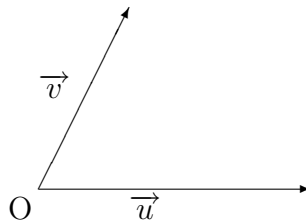
Data una sequenza di un certo numero di vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$, ed una sequenza dello stesso numero di scalari r_1, r_2, \dots , moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots,$$

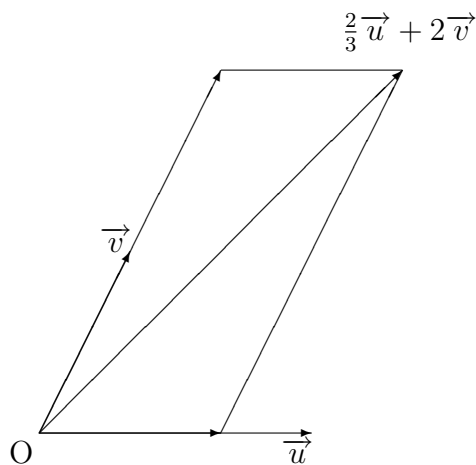
detto *combinazione lineare* dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto coefficiente del vettore \vec{a}_i nella combinazione lineare.

Esempio

- La combinazione lineare dei vettori \vec{u}, \vec{v} applicati in O



con pesi rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore



7. Interpretazione geometrica delle operazioni su \mathbb{R}^2

Fissati nel piano un punto O , una prima retta per O con un punto privilegiato diverso da O , ed una seconda retta per O , ortogonale alla prima, con un punto

privilegiato diverso da O , c'è un modo naturale di associare a ciascuna coppia ordinata di numeri reali un punto del piano, in modo che alla coppia $(0, 0)$ corrisponda l'origine O , alla coppia $(1, 0)$ corrisponda il punto unita' della prima retta, e alla coppia $(0, 1)$ corrisponda il punto unita' della seconda retta. Ciascun punto del piano si ottiene in corrispondenza di una ed una sola coppia (p, q) di numeri reali, che vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

Si ha così una corrispondenza biunivoca fra \mathbb{R}^2 e i punti del piano. Spesso identificheremo un punto del piano col vettore applicato in O avente secondo estremo in quel punto.

L'addizione di coppie di numeri reali viene allora rappresentata dall'addizione dei vettori applicati. Precisamente, se alle due coppie

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

corrispondono i vettori applicati

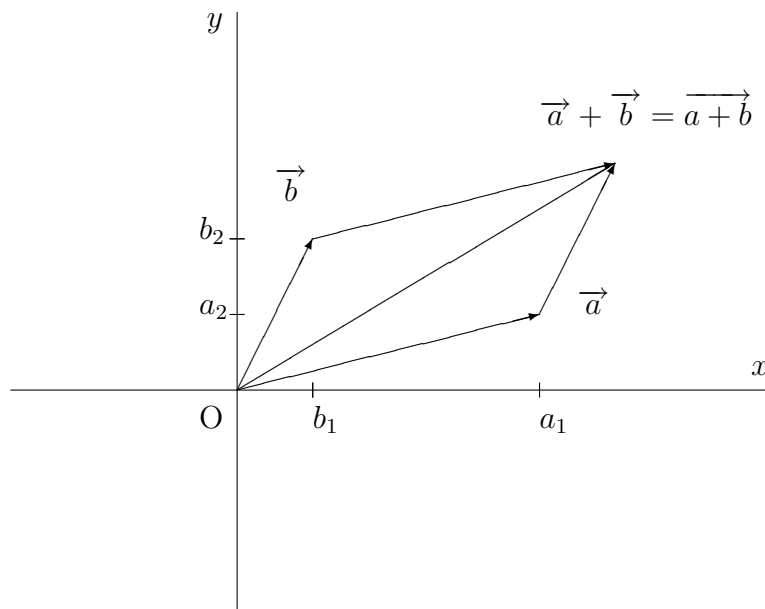
$$\vec{a}, \quad \vec{b},$$

allora alla coppia somma

$$a + b = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix},$$

corrisponde il vettore applicato somma

$$\vec{a} + \vec{b}.$$



La moltiplicazione di una coppia di numeri reali per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di un vettore applicato per un numero reale. Precisamente, se alla coppia

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

corrisponde il vettore applicato

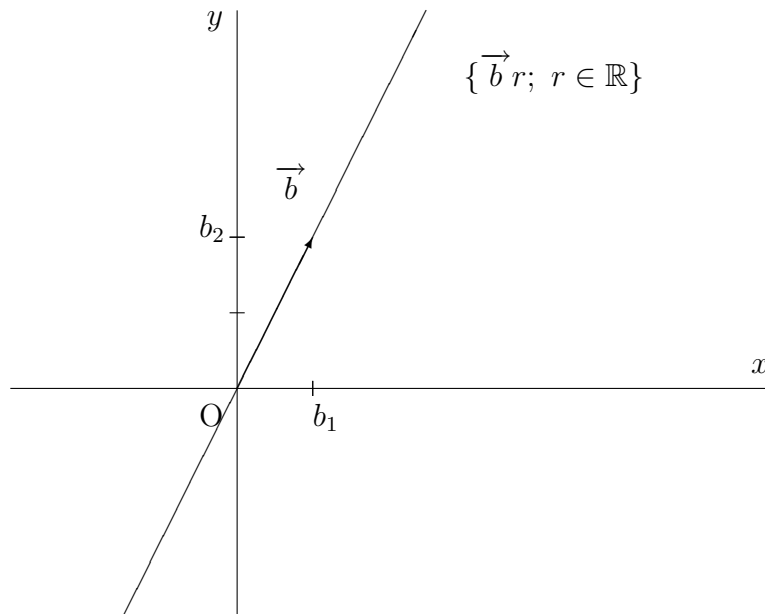
$$\vec{b},$$

e se r e' un numero reale, allora alla coppia prodotto

$$br = \begin{bmatrix} b_1 r \\ b_2 r \end{bmatrix}$$

corrisponde il vettore applicato prodotto

$$\vec{b} r.$$



Si ha che due coppie non nulle sono proporzionali se e solo se i corrispondenti vettori applicati sono allineati.

D'ora in poi identificheremo ciascuna coppia ordinata di numeri reali col corrispondente vettore applicato in O, ed useremo come simboli lettere minuscole semplici, come a al posto di \vec{a} .

8. I sistemi di due equazioni lineari possono essere interpretati geometricamente come impostazione di problemi di rappresentazione di un vettore come combinazione lineare di altri vettori, nel piano.

Ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

puo' essere rappresentato nella forma

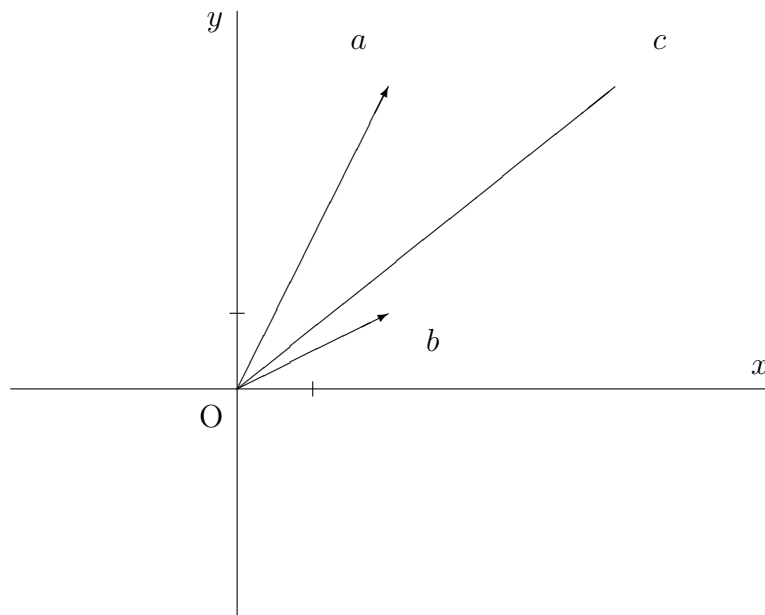
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

e sinteticamente come

$$ax + by = c,$$

dove $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Abbiamo così espresso il sistema lineare dato, di due equazioni lineari a coefficienti scalari nelle due incognite x_1, x_2 come un'unica equazione lineare a coefficienti vettoriali nelle due incognite x_1, x_2 che traduce il problema: determinare, se possibile, le combinazioni lineari dei vettori a, b il cui risultato è il vettore c .



Il fatto che il sistema lineare abbia l'unica soluzione $x_1 = 0.5$, $x_2 = 2$ viene a significare che c è una ed una sola combinazione lineare dei vettori a, b il cui risultato è il vettore c , ed è quella in cui i coefficienti valgono 0.5 e 2 :

$$0.5 a + 2 b = c.$$

9. Più in generale, i sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = c_1 \\ 4x_1 + x_2 = c_2 \end{cases}$$

possono essere interpretati come la posizione del problema di rappresentare il generico vettore c del piano come combinazione lineare dei vettori a, b .

Per ciascun vettore c , questo problema ha una ed una sola soluzione. Possiamo renderci conto geometricamente di questo fatto nel modo seguente.

Dato un qualsiasi vettore c del piano, possiamo:

- tracciare per il punto finale di c la retta parallela alla retta di b ed intersecarla con la retta da a , ottenendo così un vettore rappresentabile nella forma αa ;

- tracciare per il punto finale di c la retta parallela alla retta di a ed intersecarla con la retta da b , ottenendo così un vettore rappresentabile nella forma βb .

Per costruzione si ha

$$c = \alpha a + \beta b,$$

inoltre questa è l'unica scrittura di c come combinazione lineare di a e b .

10. Il generico sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases}$$

di due equazioni lineari nelle due incognite x_1, x_2 , con coefficienti a_i, b_i e termini noti c_i in \mathbb{R} , è equivalente all'unica equazione lineare

$$ax + by = c,$$

dove

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

la quale può essere interpretata come la posizione del problema di determinare le scritture del vettore c come combinazione lineare dei vettori a e b .

Ora, se i vettori a, b sono diversi dal vettore nullo e non sono proporzionali, si ha che

ogni vettore c del piano si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

$$c = \alpha a + \beta b$$

dei vettori a e b .

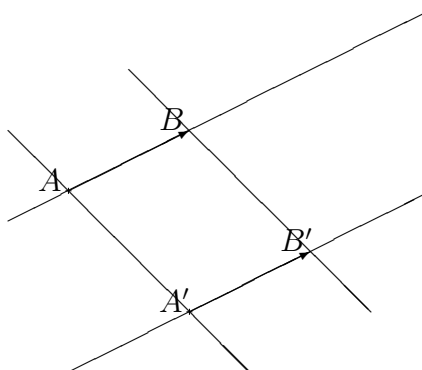
Possiamo allora dire che i vettori a e b formano un sistema di riferimento per il piano, e che i coefficienti α e β in questa combinazione lineare sono le coordinate di c in questo sistema di riferimento.

11. Vettori applicati nello spazio.

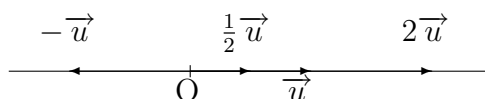
I concetti di segmento orientato, di equivalenza di segmenti orientati, di vettore applicato in un punto, di addizione di due vettori applicati in uno stesso punto, di moltiplicazione di un vettore applicato per uno scalare si estendono dal caso del piano al caso dello spazio semplicemente sostituendo appunto alla parola "piano" la parola "spazio".

Dunque si ha la sequenza di concetti:

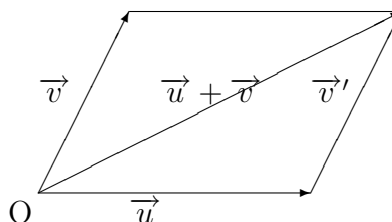
- segmenti orientati nello spazio; equivalenza di segmenti orientati; traslazione di un segmento orientato AB nel un segmento orientato $A'B'$ avente primo estremo A' ed equivalente ad AB ; vettori dello spazio applicati in un punto; vettore nullo; opposto di un vettore;



- moltiplicazione di un numero reale per un vettore applicato; Si osserva che i multipli scalari $\vec{v}r$ di un vettore applicato non nullo \vec{v} descrivono la retta su cui giace \vec{v} .



- addizione di due vettori applicati in uno stesso punto;



- combinazione lineare di vettori applicati in uno stesso punto. Si osserva che le combinazioni lineari $\vec{u}r + \vec{v}s$ di due vettori \vec{u}, \vec{v} , applicati in uno stesso punto e non allineati, descrivono il piano su cui stanno \vec{u}, \vec{v} .

Fissato nello spazio un punto O , abbiamo così definito due operazioni sui vettori dello spazio applicati in O : l'addizione di due vettori applicati in O , e la moltiplicazione di un vettore applicato in O per uno scalare reale. Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprietà del calcolo letterale.

12. Interpretazione geometrica delle operazioni su \mathbb{R}^3

Fissati nello spazio

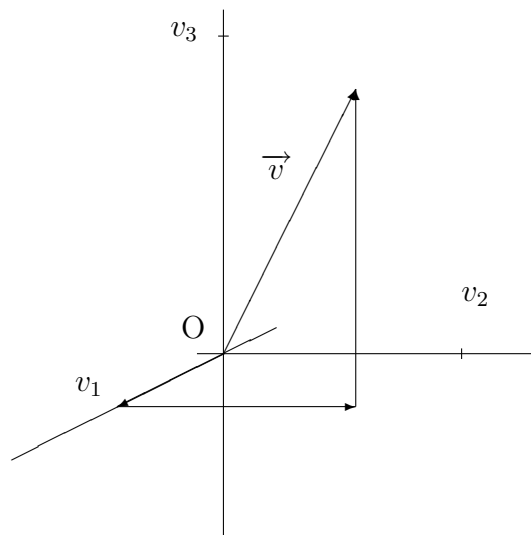
un punto O , una prima retta per O con un punto U_1 diverso da O , una seconda retta per O , ortogonale alla prima, con un punto U_2 diverso da O , ed una terza retta per O , ortogonale alle prime due, con un punto U_3 diverso da O ,

c'è un modo naturale di associare a ciascuna terna ordinata di numeri reali un punto dello spazio, in modo che

alla terna $(0, 0, 0)$ corrisponda l'origine O , alla terna $(1, 0, 0)$ corrisponda il punto U_1 , alla terna $(0, 1, 0)$ corrisponda il punto U_2 , e alla terna $(0, 0, 1)$ corrisponda il punto U_3 .

Ciascun punto dello spazio si ottiene in corrispondenza di una ed una sola terna (p, q, r) di numeri reali, che vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

Si ha così una corrispondenza biunivoca fra \mathbb{R}^3 e i punti dello spazio. Spesso identificheremo un punto dello spazio col vettore applicato in O avente secondo estremo in quel punto. Alla generica terna $v = [v_i]_{i=1}^3$ corrisponde un vettore \vec{v} che si può pensare come lo spostamento di v_1 unità lungo il primo asse, di v_2 unità lungo il secondo asse, di v_3 unità lungo il terzo asse, applicato all'origine O .



L'addizione di terne di numeri reali viene allora rappresentata dall'addizione di vettori applicati in O . Precisamente, se alle due terne $a = [a_i]_{i=1}^3$, $b = [b_i]_{i=1}^3$, corrispondono i vettori applicati \vec{a} , \vec{b} , allora alla terna somma

$$a + b = [a_i + b_i]_{i=1}^3$$

corrisponde il vettore applicato somma

$$\vec{a} + \vec{b}.$$

La moltiplicazione di una terna di numeri reali per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di un vettore applicato per un numero reale. Precisamente, se alla terna $b = [b_i]_{i=1}^3$ corrisponde il vettore applicato \vec{b} , e se r è un numero reale, allora alla terna prodotto

$$br = [b_i r]_{i=1}^3$$

corrisponde il vettore applicato prodotto

\vec{b} r.

D'ora in poi identificheremo ciascuna terna ordinata di numeri reali col corrispondente vettore applicato in O, ed useremo come simboli lettere minuscole semplici, come a al posto di \vec{a} .

13. Interpretazione geometrica dei sistemi di tre equazioni lineari.

I sistemi di tre equazioni lineari possono essere interpretati geometricamente come impostazione di problemi di rappresentazione di un vettore come combinazione lineare altri vettori, nello spazio.

Precisamente, il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3p}x_p = b_3 \end{cases}$$

puo' essere rappresentato sinteticamente nella forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

dove $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Abbiamo cosi' espresso il generico sistema lineare di tre equazioni lineari nelle p incognite x_1, x_2, \dots, x_p come la posizione del problema di determinare le combinazioni lineari dei vettori a_1, a_2, \dots, a_p il cui risultato e' il vettore b .

Di seguito, discutiamo geometricamente i sistemi di tre equazioni lineari. La discussione sara' svolta "in generale" (cfr. Lezione I).

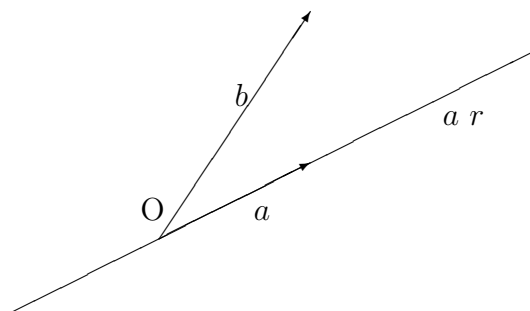
- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in una incognita x

$$ax = b, \quad a, b \in \mathbb{R}^3,$$

e supponiamo che il vettore a sia diverso dal vettore nullo. Allora i multipli scalari

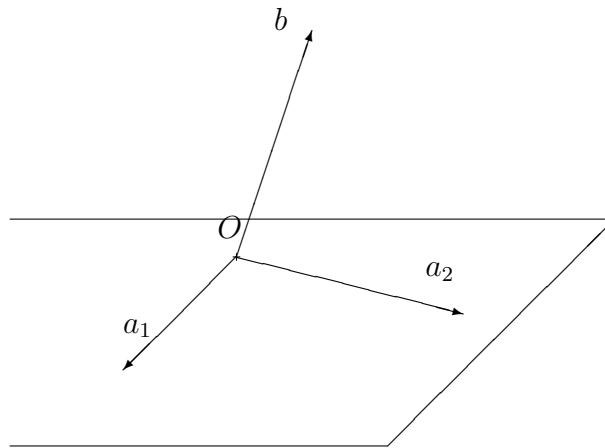
$$ax$$

descrivono la retta su cui sta a . Il sistema ha soluzione se e solo se il vettore b sta su questa retta e in tal caso il sistema e' determinato.



- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in due incognite x_1, x_2

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \quad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}^3$$
e supponiamo che i vettori a_1 e a_2 non siano allineati. Allora le combinazioni lineari
$$a_1x_1 + a_2x_2$$
descrivono il piano su cui stanno a_1 e a_2 . Il sistema ha soluzione se e solo se il vettore b sta su questo piano e in tal caso il sistema e' determinato.



- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in tre incognite x_1, x_2, x_3

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \quad a_j, b \in \mathbb{R}^3$$
e supponiamo che i vettori a_1, a_2, a_3 non siano complanari. Allora le combinazioni lineari
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$
descrivono l'intero spazio, ed ogni vettore dello spazio viene ottenuto una ed una sola volta. Il sistema e' sempre determinato.
- consideriamo il generico sistema di tre equazioni in quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b, \quad a_j, b \in \mathbb{R}^3$$
e supponiamo che i vettori a_1, a_2, a_3 non siano complanari. Allora le combinazioni lineari
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$$
descrivono l'intero spazio, ma ogni vettore dello spazio viene ottenuto piu' volte. Il sistema e' sempre indeterminato.