Matematica II, 05.12.08

L'insieme $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dei vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha la seguente proprieta': ogni vettore

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Infatti, l'equazione

$e_1 r_1 + e_2 r_2 + \cdots + e_n r_n = b$

nelle incognite $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, cioe'

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} r_2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ha una ed una sola soluzione:

$r_1 = b_1, \quad r_2 = b_2 \quad \ldots \quad r_n = b_n.$

Osserviamo che il coefficiente del vettore e_i nella rappresentazione di b come combinazione lineare dei vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ e' la componente $i-$ma di b.

Nello spazio vettorial $\mathbb{R}^n$ ci sono altri insiemi di vettori con questa proprieta'.

Definizione *Sia dato un insieme*

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$$

di vettori a_i dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Diciamo che $\mathcal{A}$ e' una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se ogni vettore b di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

$$a_1 r_1 + \cdots + a_p r_p = b, \qquad (r_i \in \mathbb{R})$$

dei vettori di $\mathcal{A}$. I coefficienti $r_1, \ldots, r_p$ si dicono coordinate del vettore b rispetto alla base $\mathcal{A}$.

Basi di $\mathbb{R}^2$.

1. L'insieme $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ dei vettori

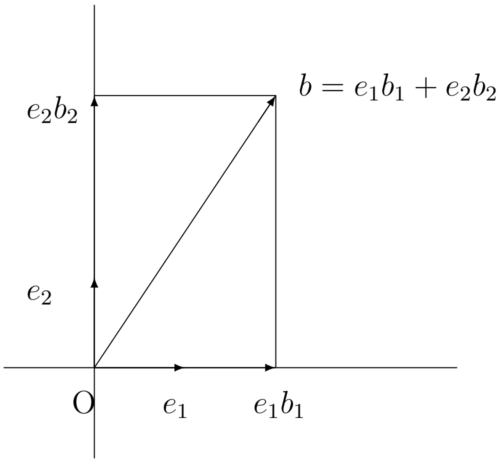
   $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

   e' una base dello spazio $\mathbb{R}^2$, detta *base canonica* di $\mathbb{R}^2$.

   Le coordinate del vettore

   $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

   rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2\}$ sono le componenti b_1, b_2 di b.



2. L'insieme $\{u, v\}$ dei vettori

   $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   e' una base per $\mathbb{R}^2$.

   Cio' significa che ogni vettore

   $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

   di $\mathbb{R}^2$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

   $ur + vs = b, \qquad r, s \in \mathbb{R}.$

   Infatti, l'equazione

   $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$

   equivale al sistema lineare

   $\begin{cases} 3r - s = b_1 \\ 2r + s = b_2 \end{cases}, \quad o \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$

   Ora, poiche'

   $Det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 5 \neq 0,$

   si ha che questo sistema e' determinato.

La soluzione puo' essere ottenuta come

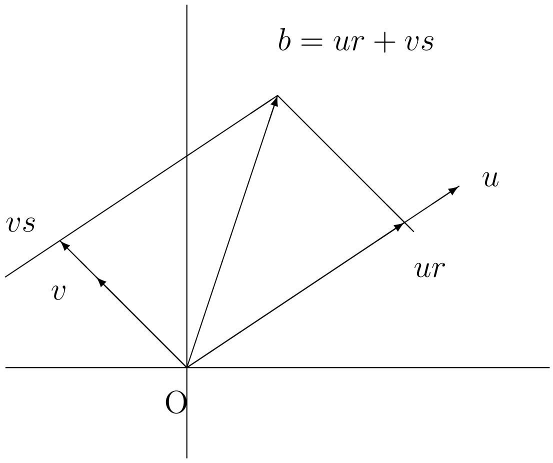
$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ -2b_1 + 3b_2 \end{bmatrix}.$$

Cosi', il vettore b si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$ur + vs = b$;

le coordinate del vettore b rispetto alla base $\{u, v\}$ sono

$r = \frac{b_1+b_2}{5}, \quad s = \frac{-2b_1+3b_2}{5}$.



3. In $\mathbb{R}^2$ non ci puo' essere una base $\{a\}$ formata da un solo vettore. Lo verificheremo distinguendo un paio di casi; in ciascuno di essi mostreremo che esiste un vettore $b \in \mathbb{R}^2$ che non si puo' scrivere come

   $ar = b$,

   per nessun scalare $r \in \mathbb{R}$.

   Infatti:

   - se $a = 0$, allora $ar = 0$ per ogni scalare $r \in \mathbb{R}$; ora, preso un vettore $b \neq 0$, si ha che b l'uguaglianza

     $ar = b$

     non e' soddisfatta per nessun valore di r.

   - se $a \neq 0$, allora i vettori ar stanno sull'unica retta contenente a, per ogni scalare $r \in \mathbb{R}$; ora, preso un vettore b che non sia contenuto in questa retta, si ha che l'uguaglianza

     $ar = b$

     non e' soddisfatta per nessun valore di r.

4. In $\mathbb{R}^2$ non ci puo' essere una base $\{a_1, a_2, a_3\}$ formata da tre vettori. Lo verificheremo distinguendo alcuni casi; in ciascuno di essi mostreremo che il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^2$, che si puo' scrivere sempre come

   $a_1 0 + a_2 0 + a_3 0 = 0$,

   si puo' scrivere anche come

$a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 = 0,$

per opportuni scalari $r_i \in \mathbb{R}$, non tutti nulli.

Infatti:

- se $a_1 = 0$, abbiamo che il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^2$ si puo' scrivere
  $a_1 1 + a_2 0 + a_3 0 = 0.$
- sia $a_1 \neq 0$; se a_2 sta sull'unica retta contenente a_1, allora $a_2 = a_1 r$ per un opportuno scalare $r \in \mathbb{R}$; cosi' abbiamo che il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^2$ si puo' scrivere
  $a_1 r + a_2(-1) + a_3 0 = 0.$
- sia $a_1 \neq 0$, e a_2 non stia sull'unica retta contenente a_1; allora $a_3 = a_1 r + a_2 s$ per opportuni scalari $r, s \in \mathbb{R}$; cosi' abbiamo che il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^2$ si puo' scrivere
  $a_1 r + a_2 s + a_3(-1) = 0.$

Basi di $\mathbb{R}^n$.

1. L'insieme $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dei vettori
   $$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   e' una base dello spazio $\mathbb{R}^n$, detta *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

   Le coordinate di un vettore
   $$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$
   rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sono le componenti $b_1, b_2, \ldots, b_n$ di b.

2. **Proposizione.** *Sia data una matrice*
   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$
   di tipo $m \times n$, con $m < n$. Allora il sistema lineare omogeneo
   $$Ax = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^{n \times 1},\ 0 \in \mathbb{R}^{m \times 1},$$
   e' indeterminato.

   Verifichiamo questa proposizione per $m = 3$ e $n = 4$, in un caso significativo. Sia dunque $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, e consideriamo il sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 incognite

$Ax = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^{4\times 1},\ 0 \in \mathbb{R}^{3\times 1},$

Consideriamo la matrice completa di questo sistema $[A|0]$. Applicando operazioni elementari alle righe di questa matrice possiamo ottenere, secondo l'algoritmo di Gauss-Jordan, una matrice $[S|0]$ a scala ridotta per righe. Questa matrice sara' la matrice completa di un sistema omogeneo

$Sx = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^{4\times 1},\ 0 \in \mathbb{R}^{3\times 1},$

che ha le stesse soluzioni del sistema dato.

Supponiamo che in S ci siano 3 pivot, nelle prime tre colonne. Allora S sara' del tipo

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix},$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} x_1 + ax_4 = 0 \\ x_2 + bx_4 = 0 \\ x_3 + cx_4 = 0 \end{cases},$$

che ha le infinite soluzioni

$$\begin{matrix} x_1 = -at \\ x_2 = -bt \\ x_3 = -ct \\ x_4 = t \end{matrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. **Proposizione.** *Sia data una matrice*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

di tipo $m \times n$, con $m > n$. Allora esiste un vettore $b \in \mathbb{R}^m$ tale che il sistema lineare

$$Ax = b, \qquad x \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$

sia impossibile.

Vedremo in seguito come questo teorema si possa dedurre dal precedente.

4. **Teorema.** *Sia dato un insieme $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_p\}$ di p vettori a_i in $\mathbb{R}^n$.*

   - *Se $p \neq n$, allora l'insieme $\mathcal{A}$ non e' una base di $\mathbb{R}^n$.*
   - *Se $p = n$, allora l'insieme $\mathcal{A}$ e' una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se la matrice*

     $$A = \left[\ a_1 \mid \dots \mid a_n\ \right]$$

     avente per colonne i vettori a_i e' non singolare. In tal caso, la colonna delle coordinate di un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base $\mathcal{A}$ e' data da

     $$A^{-1}b.$$

Dimostrazione

Poniamo

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad a_p = \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix}, \qquad e \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

L'equazione

$a_1 r_1 + \cdots + a_p r_p = b, \qquad r_i \in \mathbb{R}.$

nelle incognite $r_i \in \mathbb{R}$, cioe'

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} r_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix} r_p = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} r_1 + \cdots + a_{1p} r_p & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1} r_1 + \cdots + a_{np} r_p & = & b_n \end{cases}$$

in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ora, l'insieme $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_p\}$ sara' una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se questo sistema lineare e' determinato, per ogni $b \in \mathbb{R}^n$.

Per i teoremi dei punti precedenti, si ha:

- Nel caso $p > n$, in corrispondenza di $b = 0 \in \mathbb{R}^n$ questo sistema e' indeterminato, cosi' $\mathcal{A}$ non puo' essere una base di $\mathbb{R}^n$.
- Nel caso $p < n$, esiste un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ tale che questo sistema sia impossibile, cosi' $\mathcal{A}$ non puo' essere una base di $\mathbb{R}^n$.

Nel caso $p = n$, il sistema e' determinato per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ se e solo se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} = \left[\ a_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_n\ \right]$$

e' non singolare. In questo caso, l'unica soluzione e' data da

$r = A^{-1} b.$