Matematica II, 12.12.08

1. **Ortogonalita' nel piano.**

   Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli del piano. Considereremo sempre vettori applicati in uno stesso punto O; dati due tali vettori v, w, scriveremo

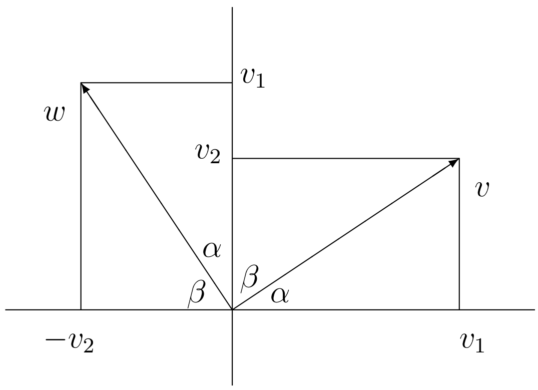
   $$v \perp w$$

   per indicare che v e w sono perpendicolari.

   Osserviamo che i vettori applicati in O ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono una retta, la retta per O ortogonale a v.

   Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^2$ con vettori applicati in O.

   Dato un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ci sono un paio di scelte psicologicamente naturali per un vettore ortogonale a v, una delle quali e' $w = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$.

   La scelta e' corretta. Informalmente, si puo' osservare che si vengono a formare quattro triangoli rettangoli uguali, l'angolo formato dai vettori v e w e' $\alpha + \beta$, ma $\alpha + \beta$ e' anche l'angolo formato dai due assi coordinati, che e' retto.

   I vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo

   $$wr = \begin{bmatrix} -v_2 r \\ v_1 r \end{bmatrix},$$

   dove r e' uno scalare qualsiasi.

   Osserviamo che la somma dei prodotti delle componenti del vettore v per le corrispondenti componenti del vettore wr e' sempre nulla:

   $$v_1 \cdot (-v_2 r) + v_2 \cdot (v_1 r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$a \perp b \qquad \textit{se e solo se} \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Ora,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a^T b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque che

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a^T b = 0.$$

2. **Ortogonalita', nello spazio**

Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli dello spazio. Considereremo sempre vettori applicati in uno stesso punto O; dati due tali vettori v, w, scriveremo

$$v \perp w$$

per indicare che v e w sono perpendicolari.

Osserviamo che i vettori applicati in O ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono un piano, il piano per O ortogonale a v.

Fissato nelo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ con vettori applicati in O.

Fatto

Si puo' provare che due vettori $a = [a_i]_{i=1}^3$ e $b = [b_i]_{i=1}^3$, sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Ora,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a^T b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque ancora che

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a^T b = 0.$$

Noi sappiamo che, per costruzione, i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due ortogonali. Cio' si ritrova anche algebricamente, in quanto

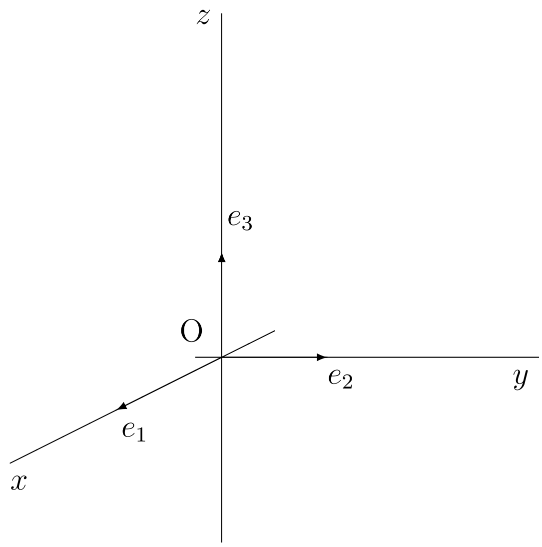
$e_1^T e_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$

$e_1^T e_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$

$e_2^T e_3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$

Possiamo anche ritrovare che i vettori che stanno sul piano xy sono ortogonali ai vettori che stanno sull'asse z. Infatti, i primi sono del tipo $a = [a_i]_{i=1}^3$ con $a_3 = 0$, i secondi sono del tipo $b = [b_i]_{i=1}^3$ con $b_1 = b_2 = 0$, e si ha

$a^T b = a_1 0 + a_2 0 + 0 b_3 = 0.$



3. **Ortogonalita' e prodotto interno nello spazio $\mathbb{R}^n$.**

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ definiamo il prodotto interno di due vettori $a = [a_i]_{i=1}^n$ e $b = [b_i]_{i=1}^n$ come il numero reale dato dall'espressione

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a^T b.$$

Dalle proprieta' delle operazioni sulle matrici seguono le seguenti proprieta' del prodotto interno:

$(a+b)^T c = a^T c + b^T c,$

$a^T(b+c) = a^T b + a^T c,$

$(ar)^T b = a^T(br) = (a^T b)r,$

per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, ed $r \in \mathbb{R}$.

Il prodotto interno e' simmetrico:

$$a^T b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = b^T a.$$

Il prodotto interno di un vettore $a = [a_i]_{i=1}^n$ con se' stesso si annulla se e solo se tutte le componenti a_i di a sono nulle, cioe' a e' il vettore nullo 0_n di $\mathbb{R}^n$:

$$a^T a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad a = 0_n.$$

Per definizione, diciamo che due vettori $v = [v_i]_{i=1}^n$ e $w = [w_i]_{i=1}^n$, di $\mathbb{R}^n$ sono ortogonali se e solo se il loro prodotto interno e' nullo:

$$v \perp w \quad \textit{se e solo se} \quad v^T w = 0 = w^T v.$$

Da questa definizione segue che i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono a due a due ortogonali:

$e_i \perp e_j, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad con\ i \neq j.$

Infatti, il prodotto interno dell'$i-$mo vettore e_i della base canonica col generico vettore $w = [w_i]_{i=1}^n$ e' dato da

$e_i^T w = 0 \cdot w_1 + \cdots + 0 \cdot w_{i-1} + 1 \cdot w_i + 0 \cdot w_{i+1} + \cdots + 0 \cdot w_n = w_i,$

che e' la $i-$ma componente di w. Da cio' segue che per $j \neq i$ si ha

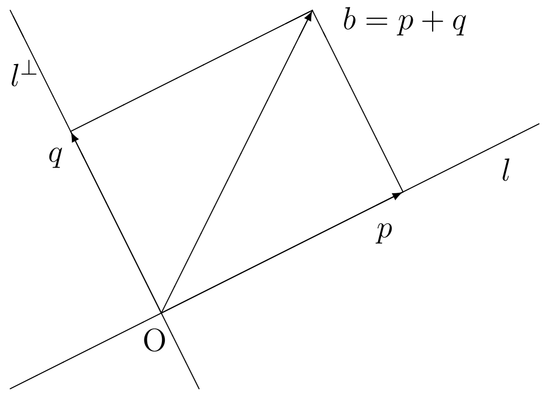
$e_i^T e_j = 0.$

4. **Proiezione ortogonale di un vettore su una retta, nel piano.**

Siano dati nel piano un punto O e una retta l per O, e sia $l^\perp$ la retta per O perppendicolare ad l. Ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma

$$b = p + q$$

di due vettori applicati in O, un vettore p sulla retta l ed un vettore q sulla retta $l^\perp$. Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b su l, e che q e' la proiezione ortogonale di b su $l^\perp$.



Vediamo ora come questa costruzione si possa effettuare algebricamente. Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine nel punto O, ed identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^2$ con vettori applicati in O. Possiamo allora descrivere la retta l come l'insieme dei vettori multipli scalari di un vettore non nullo a :

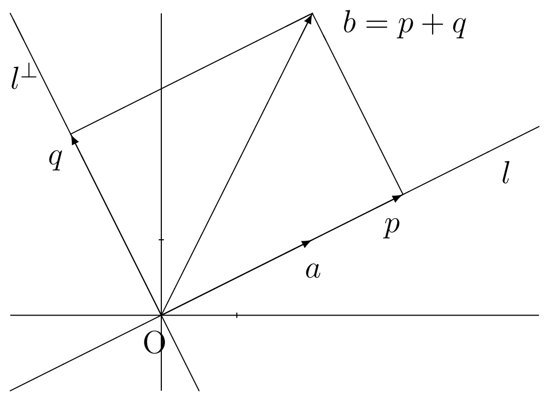
$$l = \{ar;\ r \in \mathbb{R}\},$$

e la retta $l^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali al vettore a :

$$l^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ a^T x = 0\}.$$

Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$



Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= ar, \qquad r \in \mathbb{R} \\ a^T q &= 0, \end{aligned}$$

dove r e' uno scalare incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per a^T entrambe i membri si ha

$$a^T b = a^T(ar + q) = a^T ar + a^T q = a^T ar,$$

cioe'

$$a^T a\ r = a^T b.$$

Ora, questa e' un'equazione lineare nell'incognita r, e il coefficiente $a^T a$ e' diverso da 0 in quanto a e' diverso dal vettore nullo. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{a^T b}{a^T a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = ar = a\frac{a^T b}{a^T a}.$$

Nel nostro caso, si ha

$r = \frac{a^T b}{a^T a} = \dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{8}{5},$

da cui

$p = ar = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{8}{5} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$

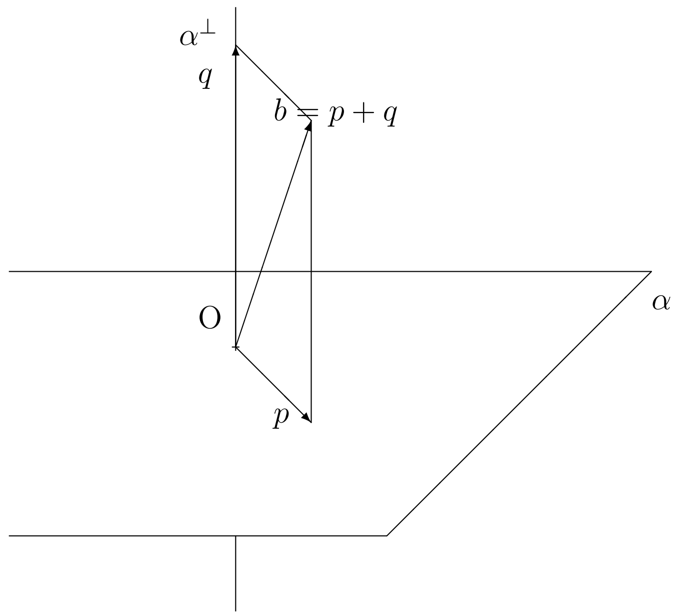
$q = b - p = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 2.4 \end{bmatrix}.$

5. **Proiezione ortogonale di un vettore su un piano, nello spazio.**

Siano dati nello spazio un punto O e un piano α per O, e sia $\alpha^{\perp}$ la retta per O perpendicolare ad α. Ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma

$$b = p + q$$

di due vettori applicati in O, un vettore p sul piano α ed un vettore q sulla retta $\alpha^{\perp}$. Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b sul piano α, e che q e' la proiezione ortogonale di b sulla retta $\alpha^{\perp}$.



Vediamo ora come questa costruzione si possa effettuare algebricamente. Fissiamo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine nel punto O, ed identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ con vettori applicati in O. Possiamo allora descrivere il piano α come l'insieme dei vettori combinazioni lineari di due vettori linearmente indipendenti a_1, a_2 :

$$\alpha = \{a_1 r_1 + a_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\},$$

e la retta $\alpha^{\perp}$ come l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori a_1, a_2 :

$$\alpha^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ a_1^T x = 0,\ a_2^T x = 0\}.$$

Prima di procedere, conviene rappresentare il piano α e la retta $\alpha^{\perp}$ in un modo piu' sintetico. Osserviamo che le combinazioni lineari $a_1 r_1 + a_2 r_2$ dei vettori a_1 e a_2 si possono scrivere nella forma

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array}\right],$$

e che le condizioni di ortogonalita' $a_1^T x = 0,\ a_2^T x = 0$ ai vettori a_1, a_2 si possono riscrivere nella forma

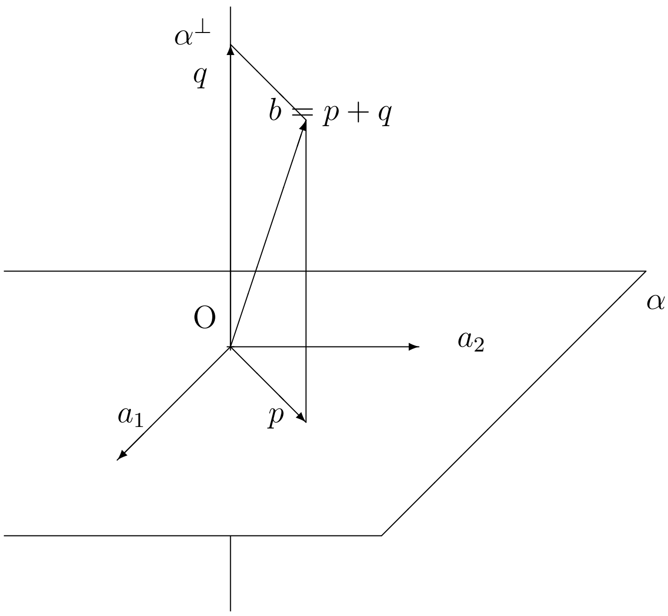
$$\left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline a_2^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \\ x \\ \\ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Percio', posto $A = \left[\begin{array}{c|c} & \\ a_1 & a_2 \\ & \end{array}\right]$, ed osservato che $\left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline a_2^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & \\ a_1 & a_2 \\ & \end{array}\right]^T = A^T$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \alpha &= \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^2\}, \\ \alpha^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 :\ A^T x = 0_2\}. \end{aligned}$$

Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= Ar, \qquad r \in \mathbb{R}^2 \\ A^T q &= 0, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^2$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A^T entrambe i membri si ha

$$A^T b = A^T(Ar + q) = A^T Ar + A^T q = A^T Ar,$$

cioe'

$$A^T A\ r = A^T b.$$

Ora, la matrice quadrata $A^T A$ e' non singolare in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti (vedremo in seguito perche'). Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b,$$

dalla quale si ottiene

$$p = Ar = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

Nel nostro caso, si ha

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 17 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 79 \\ 5 \end{bmatrix}$$

da cui

$$p = Ar = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 79 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{1}{81} = \begin{bmatrix} 79 \\ 20 \\ 163 \end{bmatrix} \frac{1}{81},$$

e

$$q = b - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 79 \\ 20 \\ 163 \end{bmatrix} \frac{1}{81} = \begin{bmatrix} 2 \\ 61 \\ -82 \end{bmatrix} \frac{1}{81}.$$