

Matematica II, qualche esercizio

1. Risolvere il seguente sistema lineare: (a) con il metodo di eliminazione di Gauss, (b) con la regola di Cramer, (c) invertendo la matrice dei coefficienti.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

2. Vero o falso?
 - a) Un sistema lineare con 3 incognite e 3 equazioni e' sempre determinato.
 - b) Un sistema lineare con 3 incognite e 4 equazioni e' sempre impossibile.
 - c) Un sistema lineare con 3 incognite e 2 equazioni e' sempre indeterminato.
 - d) Se il determinante della matrice dei coefficienti di un sistema lineare con 3 incognite e 3 equazioni e' diverso da 0, allora il sistema e' determinato.
3. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema e' determinato, indeterminato, impossibile.

$$\begin{cases} x - ay + z = 6 \\ ax + 2y + 3z = 2a \\ x - 4y - z = 10 \end{cases}$$

4. Individuare quali matrici sono invertibili e calcolare l'inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Si determinino autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

e si dia una formula per la potenza A^n , per n intero relativo.

6. Trovare gli autovalori della matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Trovare tre autovettori di A u_1, u_2, u_3 corrispondenti ai tre autovalori. Usando autovalori ed autovettori, rappresentare A nella forma $A = P^{-1}DP$, dove D e' una matrice diagonale.

7. In \mathbb{R}^3 sono dati i vettori $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale di w sulla retta generata da u , e la distanza di w da questa retta;
- la proiezione ortogonale di w sul piano generato da u, v e la distanza di w da questo piano;

8. Nello spazio \mathbb{R}^n sono dati tre vettori u, v, w a due a due ortogonali. Si dimostri che vale l'estensione

$$\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$$

del teorema di Pitagora.

9. Si determini la relazione

$$y = a + bx + cx^2$$

che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, l'insieme di dati

x	y
-2	0
-1	1
1	0
2	1