# Matematica II, 12.11.08

## Sistemi lineari in un numero qualsiasi di incognite

1. Nel seguito, indicheremo con $R^n$ l'insieme di tutte le $n-$ple ordinate

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

di numeri reali. Per $n = 1, 2, 3$ questo insieme si puo' identificare con una retta, un piano, o lo spazio; si vedra' che i fatti geometrici salienti della geometria dello spazio continuano a valere anche per $n > 3$ : gli oggetti avranno pero' natura piu' propriamente algebrica, e cosi' anche i risultati e le loro dimostrazioni.

Un'*equazione lineare* nelle $n$ incognite reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad cioe' \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; gli $a_i$ sono i *coefficienti* e $b$ e' il *termine noto* dell'equazione. Una *soluzione* di questa equazione e' una $n-$pla ordinata $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali che sostituiti alle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendono vera l'uguaglianza:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Se il coefficiente $a_1$ dell'incognita $x_1$ e' non nullo, possiamo ricavare $x_1$ in funzione delle successive incognite, ottenendo

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n + \frac{b}{a_1}$$

e possiamo descrivere l'insieme delle soluzioni come

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_2}{a_1}t_2 - \frac{a_3}{a_1}t_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}t_n + \frac{b}{a_1} \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ \vdots \\ x_n = t_n \end{cases},$$

dove $t_2, t_3, \ldots, t_n$ sono $n-1$ parametri reali liberi. In modo simile si puo' procedere nel caso in cui ci sia almeno un coefficiente $a_i$ non nullo.

Se tutti i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono nulli e il termine noto $b$ e' non nullo, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' vuoto; se tutti i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e il termine noto $b$ sono nulli, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' tutto $R^n$.

Le equazioni lineari in $n$ incognite in cui ci sia almeno un coefficiente $a_i$ non nullo hanno dunque un insieme delle soluzioni che dipende da $n-1$ parametri reali liberi, e possono essere riguardate come la generalizzazione delle rette nel piano $\mathbb{R}^2$, e dei piani nello spazio $\mathbb{R}^3$.

2. Un *sistema di $m$ equazioni lineari* in $n$ incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' una sequaenza di $m$ equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

in breve

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli $a_{ij}$ sono i *coefficienti* e i $b_i$ sono i *termini noti* del sistema. Una *soluzione* di questo sistema e' una $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Il sistema si dice

- *impossibile* se non possiede alcuna soluzione;
- *determinato* se possiede una ed una sola soluzione;
- *indeterminato* se possiede piu' di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato in realta' possiede infinite soluzioni.

Diciamo che due sistemi lineari sono *equivalenti* quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

3. Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

detta *matrice completa* del sistema; nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita $x_1$ nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita $x_2$ nelle varie equazioni, ... nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni. La matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

viene detta matrice dei coefficienti del sistema.

**Metodo di eliminazione di Gauss**

1. I sistemi di un numero qualsiasi di equzioni lineari in un numero qualsiasi di incognite si possono ancora risolvere col metodo di sostituzione, ma col crescere dei numeri delle equazioni e delle incognite conviene usare un altro metodo di risoluzione, detto *metodo di eliminazione di Gauss*. Anche in questo metodo, il passo fondamentale consiste in un modo di ricondurre la risoluzione di un sistema di $m$ equazioni in $n$ incognite alla risoluzione di un sistema di $m-1$ equazioni in $n-1$ incognite. Questo modo consiste nel sommare multipli di una equazione alle altre equazioni, in modo da eliminare una incognita.

2. **Operazioni sulle equazioni**

   Data un'equazione

   $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$

   nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$, possiamo moltiplicare entrambi i membri per uno stesso numero reale $p$, ottenendo cosi' la nuova equazione

   $p(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = pb$

   cioe'

   $pa_1x_1 + \cdots + pa_nx_n = pb.$

   Indicata con $E$ l'equazione data, possiamo indicare l'equazione ottenuta con $pE$. Ogni soluzione di $E$ e' anche una soluzione di $pE$; nel caso $p \neq 0$ vale anche il viceversa.

   Esempio: data

   $E: \ x + 2y = 3,$

   si ha

   $4E: \ 4x + 8y = 12.$

   Date due equazioni

   $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$

   $a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$

   nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$, possiamo sommare membro a membro le due equazioni, ottenendo cosi' la nuova equazione

   $(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + (a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n) = b + b'$

   cioe'

   $(a_1 + a'_1)x_1 + \cdots + (a_n + a'_n)x_n = b + b'.$

   Possiamo anche sommare membro a membro la prima equazione e la seconda equazione moltiplicata per un numero reale $p$, ottenendo cosi' la nuova equazione

   $(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + p(a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n) = b + pb'$

   cioe'

   $(a_1 + pa'_1)x_1 + \ldots + (a_n + pa'_n)x_n = b + pb'.$

Indicate con $F$ e $F'$ le equazioni date, possiamo indicare l'equazione ottenuta con $F + pF'$.

Ogni soluzione comune alle equazioni $F$ e $F'$ e' anche soluzione dell'equazione $F + pF'$.

Esempi: date

$F: \ x + 2y = 3,$

$F': \ 5x + 6y = 7,$

si ha:

$F + F': \ 6x + 8y = 10,$

$F - 2F': \ 3x + 2y = 1,$

$F + pF': \ (1 + 5p)x + (6 + 2p)y = 7 + 3p.$

3. **Eliminazione di Gauss, esempio 1**

   Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{array}{lrcl} E & x + 2y & = & 3 \\ F & 5x + 6y & = & 7 \end{array}$$

   di due equazioni $E, F$ nelle due incognite $x, y$.

   Possiamo usare la prima equazione per eliminare la $x$ dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $-5$ :

$$\begin{array}{lrcr} E & x + 2y & = & 3 \\ F - 5E & -4y & = & -8 \end{array}.$$

   Ora possiamo ricavare il valore della $y$ dalla seconda equazione:

   $y = 2,$

   sostituire questo valore della $y$ nella prima equazione, e ricavare il valore della $x$ :

   $x + 4 = 3 \qquad x = -1.$

   Il sistema e' determinato, ed ha l'unica soluzione

$$(-1, 2).$$

4. **Eliminazione di Gauss, esempio 2**

   Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{array}{lrcl} E & x + 2y + 3z & = & 3 \\ F & 4x + 5y + 6z & = & 0 \\ G & 7x + 8y + 8z & = & 0 \end{array}$$

   di tre equazioni $E, F, G$ nelle tre incognite $x, y, z$.

- Possiamo usare la prima equazione per eliminare la $x$ dalla seconda e dalla terza equazione:

$$\begin{array}{lrcr} E & x+2y+3z & = & 3 \\ F-4E & -3y-6z & = & -12 \\ G-7E & -6y-13z & = & -21 \end{array}$$

- Possiamo usare la seconda equazione per eliminare la $y$ dalla terza equazione:

$$\begin{array}{lrcr} E & x+2y+3z & = & 3 \\ F & -3y-6z & = & -12 \\ G-2F & -z & = & 3 \end{array}$$

  Qui termina il processo di eliminazione; abbiamo ottenuto un sistema di un tipo particolare, che si dice 'triangolare'.

- Ora possiamo ricavare il valore della $z$ dalla terza equazione:
  $z=-3,$
  sostituire questo valore della $z$ nella seconda equazione, e ricavare il valore della $y$ :
  $-3y+18=-12 \qquad -3y=-30 \qquad y=10,$
  sostituire questi valori della $z$ e della $y$ nella prima equazione, e ricavare il valore della $x$ :
  $x+20-9=3 \qquad x=-8.$

Il sistema e' determinato, ed ha l'unica soluzione

$$(-3,10,-8).$$

5. **Operazioni sulle righe**

Data una riga di numeri reali

$\left[\begin{array}{lll} a_1 & a_2 & \dots \end{array}\right]$

possiamo moltiplicare ogni componente della riga per uno stesso numero reale $p$, ottenendo cosi' la nuova riga

$\left[\begin{array}{lll} pa_1 & pa_2 & \dots \end{array}\right].$

Indicata con $R$ la riga data, possiamo indicare la riga ottenuta con $pR$.

Esempio: data,

$R: \qquad \left[\begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \end{array}\right],$

si ha

$5R: \qquad \left[\begin{array}{lll} 5 & 10 & 15 \end{array}\right].$

Date due righe composte da uno stesso numero di numeri reali

$\left[\begin{array}{lll} a_1 & a_2 & \dots \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{lll} a'_1 & a'_2 & \dots \end{array}\right],$

possiamo sommare la prima componente della prima riga con la prima componente della seconda riga, la seconda componente della prima riga con la seconda componente della seconda riga, ... ottenendo cosi' la nuova riga

$\left[\begin{array}{ccc} a_1 + a_1' & a_2 + a_2' & \dots \end{array}\right].$

Indicate con $R$ ed $R'$ le righe date, possiamo indicare la riga ottenuta con $R+R'$.

Esempio: date

$R \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}\right],$

$R' \quad : \quad \left[\begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \end{array}\right],$

si ha:

$R+R' : \quad \left[\begin{array}{ccc} 6 & 8 & 10 \end{array}\right].$

6. **Eliminazione di Gauss, esempio 3**

Consideriamio il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y-3z = 2 \\ -x-4y+5z = 0 \\ 2x+6y-7z = 0 \end{cases}$$

nelle incognite $x, y, z$.

Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\begin{array}{c} R \\ S \\ T \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right],$$

ed eseguiamo le seguenti operazioni:

- usiamo la prima riga per annullare il primo elemento nelle seguenti righe:

$$\begin{array}{cc} R & \\ S & +R \\ T & -2R \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right].$$

- usiamo la seconda riga per annullare il secondo elemento della terza riga:

$$\begin{array}{cc} R & \\ S & \\ T & +S \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Ora, a questa matrice completa corrisponde il sistema lineare triangolare

$$\begin{cases} x+2y-3z = 2 \\ -2y+2z = 2 \\ z = -2 \end{cases}.$$

Il sistema e' dunque determinato, e si puo' risolvere per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione.

La risoluzione del sistema si puo' ultimare anche continuando ad operare sulla matrice completa nel modo seguente:

- usiamo la terza riga per eliminare il terzo elemento dalle righe precedenti:

$$\begin{array}{ll} R & +3T \\ S & -2T \\ T & \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

- usiamo la seconda riga per eliminare il secondo elemento dalla prima riga:

$$\begin{array}{ll} R & +S \\ S & \\ T & \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

- moltiplichiamo la seconda riga per $-\frac{1}{2}$ :

$$\begin{array}{r} R \\ -\frac{1}{2}S \\ T \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

A questa matrice completa corrisponde il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{cccrr} x & & & = & 2 \\ & y & & = & -3 \\ & & z & = & -2 \end{array}\right. ,$$

che porge direttamente la soluzione

$$(2, -3, -2).$$