Matematica II 14.11.08-1

1. Una matrice si dice *triangolare superiore* se tutti i suoi elementi al di sotto della diagonale discendente sono nulli, cioe' se e' del tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}.$$

   Le matrici triangolari superiori con tre righe e quattro colonne, con tre righe e tre colonne, con quattro righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   dove $a, b, \dots, i$ sono numeri reali.

2. Il primo elemento non nullo di una riga di numeri reali si dice *pivot* della riga - tutte le righe hanno un pivot, tranne le righe nulle.

   Una matrice si dice *matrice a scala per righe* se il pivot della prima riga e' strettamente a sinistra del pivot della seconda riga, che a sua volta e' strettamente a sinistra del pivot della terza riga, che a sua volta e' ...; e infine compaiono eventualmente delle righe nulle.

   In altri termini, una matrice a scala per righe e' una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i_1} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2i_2} & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3i_3} & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{pi_p} & \dots & a_{pn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

   dove $0 \leq p$ e' il numero delle righe non nulle della matrice, $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{pi_p} \neq 0$ sono i pivot delle prime righe, e $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. In ciascuna riga non nulla, gli elementi a destra del pivot non sono stati indicati per semplicita'.

   Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici a scal per righe con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In ciascuna di queste matrici, il simbolo $\diamond$ indica un numero non nullo, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

3. **Descrizione informale dell'algoritmo di Gauss.**

L'algoritmo di Gauss prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala per righe con m righe ed n colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le *operazioni elementari per righe*:

- sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
- scambiare due righe;
- moltiplicare una riga per un numero reale non nullo.

Diamo di seguito una descrizione informale dell'algoritmo.

Sia data una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

con m righe ed n colonne. Se tutte le righe di A sono nulle allora A e' una matrice a scala. Se qualche riga di A non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la prima riga di A sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle. La matrice A assume allora la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{2j_1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

dove $a_{1j_1} \neq 0$. Sommando alla seconda, terza, ..., riga un opportuno multiplo della prima riga, possiamo annullare tutti gli elementi sotto il pivot della prima riga, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & a_{1,j_1+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,j_1+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Se tutte le righe di A dalla seconda in poi sono nulle allora A e' una matrice a scala. Se qualche riga di A dalla seconda in poi non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la seconda riga di A sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle dalla seconda in poi. La matrice A assume allora la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3j_2} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

dove $a_{1j_1}, a_{2j_2} \neq 0$ e $j_1 < j_2$. Sommando alla terza, quarta, ..., riga un opportuno multiplo della seconda riga, possiamo annullare tutti gli elementi sotto il pivot della seconda riga, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & a_{2j_2+1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{3j_2+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Se tutte le righe di A dalla terza in poi sono nulle allora A e' una matrice a scala. Se qualche riga di A dalla terza in poi non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la terza riga di A sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle dalla terza in poi ....

Alla fine giungeremo ad una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3j_3} & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{pj_p} & \dots & s_{pn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

con $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{pj_p} \neq 0$ e $j_1 < j_2 < \dots < j_p$, cioe' a una matrice a scala.