## Matematica II 14.11.08-2

1. Possiamo usare l'algoritmo di eliminazione di Gauss per risolvere i sistemi lineari in modo meccanico.

   Sia dato un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

   di $m$ equazioni nelle $n$ incognite $x_1, \ldots, x_n$. Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

   ed applichiamo a questa matrice l'algoritmo di Gauss, ottenendo cosi' una matrice a scala per righe, che sara' del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \ldots & 0 & a'_{1j_1} & & & & & & & & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \ldots & 0 & a'_{2j_2} & & & & & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & & & \ldots & & & \ldots & 0 & a'_{pj_p} & \ldots & a'_{pn} & b'_p \\ 0 & \ldots & & & \ldots & & & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{p+1} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \end{array}\right],$$

   con $a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \ldots, a'_{pj_p} \neq 0$. A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} a'_{1j_1}x_{j_1} + \quad \ldots & & & +a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & a'_{2j_2}x_{j_2} + \quad \ldots & & +a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & \vdots & \\ & & a'_{pj_p}x_{j_p} + \quad \ldots & +a'_{pn}x_n & = & b'_p \\ & & & 0 & = & b'_{p+1} \end{cases},$$

   che e' equivalente al sistema dato.

   Se $b'_{p+1} \neq 0$, il sistema e' impossibile.

   Se $b'_{p+1} = 0$, allora il sistema ha soluzioni. Per $p = n$, il sistema e' determinato. Per $p < n$ possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite

   $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}$,

   riguardando le altre incognite come parametri, e il sistema e' indeterminato.

2. Queste considerazioni suggeriscono il seguente Teorema, del quale non diamo la dimostrazione formale.

   **Teorema** *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

   *una matrice con* $n$ *righe ed* $n$ *colonne, e sia* $S$ *la matrice a scala ottenuta applicando ad* $A$ *l'algoritmo di Gauss.*

   - *Se in ogni colonna di* $S$ *compare un pivot, cioe' se* $S$ *e' una matrice diagonale con elementi diagonali non nulli*

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}, \qquad s_{11}, s_{22}, \dots, s_{nn} \neq 0,$$

     *allora tutti i sistemi lineari*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

     *con matrice dei coefficienti* $A$ *sono determinati.*

   - *In caso contrario, nessun sistema lineare con matrice dei coefficienti* $A$ *e' determinato, e fra di essi ce ne saranno sia di immpossibili che di indeterminati.*

**Esercizio** Si applichi l'algoritmo di Gauss alla matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Cosa si puo' dire dei sistemi lineari che hanno $M$ come matrice dei coefficienti?