Matematica II, 19.11.08

Matrice inversa

1. Per $n = 1$, l'insieme $\mathbb{R}^{n\times n}$ delle matrici quadrate di ordine n diventa l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali.

   In $\mathbb{R}$, il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale e' uguale a quell'altro numero reale:

   $1\ a = a = a\ 1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

   L'inverso a^{-1} di un numero reale non nullo a e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto del numero reale per il suo inverso e' uguale a 1:

   $a\ a^{-1} = 1 = a^{-1}\ a.$

   Un'equazione lineare

   $ax = b$

   nell'incognita reale x e' determinata se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l'unica soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} :

   $a^{-1}ax = a^{-1}b; \qquad 1x = a^{-1}b; \qquad x = a^{-1}b.$

   In questa lezione vedremo come queste nozioni e questi fatti si estendono al caso delle matrici quadrate di un qualsiasi ordine $n \geq 1$.

2. **Matrice inversa**

   Definizione *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Una matrice B quadrata di ordine n si dice inversa di A se sia moltiplicando A per B a destra che moltiplicando A per B a sinistra si ottiene la matrice I_n unita' di ordine n :*

   $$AB = I_n = BA.$$

   In tal caso, si dice che A e' invertibile.

   Sia A una matrice quadrate di ordine n. Se una matrice B quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla destra di A e se una matrice C quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla sinistra di A, allora queste due matrici coincidono; infatti

   $$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

   Dunque se A possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con

   $$A^{-1}.$$

   Nella discussione dei seguenti esempi si adotta un approccio ingenuo. Vedremo in seguito un metodo efficiente per decidere se una matrice e' invertibile o meno e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + q = 1 \\ -p + q = 0 \\ r + s = 0 \\ -r + s = 1 \end{cases}.$$

Questo sistema lineare di quattro equazioni in quatto incognite in realta' consiste di due sistemi di due equazioni in due incognite ciascuno. Dalle prime due equazioni ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite p, q :

$p = 0.5,$

$q = 0.5;$

dalle seconde due equazioni ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite r, s :

$r = -0.5,$

$s = 0.5;$

Dunque c'e' una ed una sola matrice inversa destra di A, ed e'

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che B e' anche inversa sinistra di A, dunque e' l'inversa di A :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chedersi se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + 2q = 1 \\ 3p + 6q = 0 \\ r + 2s = 0 \\ 3r + 6s = 1 \end{cases}.$$

Ora, la prima e la seconda equazione di questo sistema sono incompatibili. Dunque A non possiede alcuna inversa destra, e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

Concludiamo questo paragrafo osservando due proprieta': se una matrice A e' invertibile, anche la sua inversa A^{-1} e' invertibile, e si ha

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche il loro prodotto AB e' invertibile, e l'inversa di AB e' il prodotto delle inverse, nell'ordine opposto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Verifichiamo questa seconda proprieta':

$$\begin{aligned} \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n, \\ (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

3. **Da matrici invertibili verso sistemi determinati.**

Teorema 1. *Se una matrice A quadrata di ordine n possiede inversa, allora ciascun sistema lineare di n equazioni in n incognite*

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

con matrice dei coefficienti A e' determinato; inoltre, la sua unica soluzione e' data da

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}.$$

Dimostrazione. Dal fatto che A^{-1} e' inversa sinistra di A, ricaviamo

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ A^{-1}\left(A\underline{x}\right) &= A^{-1}\underline{b} \\ \left(A^{-1}A\right)\underline{x} &= A^{-1}\underline{b} \\ I_n\underline{x} &= A^{-1}\underline{b} \\ \underline{x} &= A^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

. Usando il fatto che A^{-1} e' inversa destra di A, mostriamo che questa e' davvero una soluzione:
$$A\left(A^{-1}\underline{b}\right) = \left(AA^{-1}\right)\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}.$$

cvd

Applicazione.

Consideriamo il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad o \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$
cioe'
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
dove b_1, b_2 sono termini noti arbitrari.

Sapendo che la matrice dei coefficienti

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

possiede inversa

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$,

si ha che il sistema lineare e' determinato, ed ha come unica soluzione
$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b},$$
cioe'
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad o \qquad \begin{array}{rcr} x_1 & = & 0.5b_1 + 0.5b_2 \\ x_2 & = & -0.5b_1 + 0.5b_2 \end{array}.$$

4. **Da sistemi determinati verso matrici invertibili**

Teorema 2. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se tutti i sistemi lineari*
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
aventi matrice dei coefficienti A sono determinati, allora A e' invertibile.

Dimostrazione (parziale). Proviamo soltanto che A possiede un'inversa destra. Indicate con
$$\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \underline{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
le colonne della matrice unita' I_n, consideriamo i sistemi lineari
$$A\underline{x_1} = \underline{e_1}, \quad A\underline{x_2} = \underline{e_2}, \quad \ldots \quad A\underline{x_n} = \underline{e_n}.$$

Ora, per ipotesi tutti questi sistemi lineari sono determinati; siano

$\underline{s_1}, \quad \underline{s_2}, \quad \dots \quad \underline{s_n}$

le rispettive soluzioni. Si hanno cosi' le n uguaglianze

$$A\underline{s_1} = \underline{e_1}, \quad A\underline{s_2} = \underline{e_2}, \quad \dots \quad A\underline{s_n} = \underline{e_n},$$

che possono essere riassunte nell'unica uguaglianza

$$A\left[\underline{s_1}\ \underline{s_2}\ \dots\ \underline{s_n}\right] = \left[\underline{e_1}\ \underline{e_2}\ \dots\ \underline{e_n}\right] = I_n.$$

Dunque la matrice

$$S = \left[\underline{s_1}\ \underline{s_2}\ \dots\ \underline{s_n}\right]$$

e' un'inversa destra di A.

cvd

5. **Algoritmo di Gauss-Jordan.** Una matrice a scala per righe che soddisfi le ulteriori codizioni

   ciascun pivot e' uguale a 1,

   ciascun pivot e' l'unico elemento non nullo della sua colonna

   si dice matrice *a scala ridotta per righe.*

   Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Le matrici a scala ridotta per righe con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   In ciascuna di queste matrici, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

L'algoritmo di Gauss-Jordan prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala ridotta per righe con m righe ed n colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le *operazioni elementari per righe*:

- sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
- scambiare due righe;
- moltiplicare una riga per un numero reale non nullo.

Diamo di seguito una descrizione informale dell'algoritmo. Usando le prime due operazioni elementari si trasforma la matrice data in una matrice a scala per righe. Osserviamo che tutti gli elementi al di sotto di un pivot sono nulli. Usando la prima operazione elementare si annullano anche tutti gli elementi al di sopra di un pivot. Usando la terza operazione elementare si rendono tutti i pivot uguali a 1.

L'algoritmo di Gauss-Jordan puo' essere usato per calcolare in modo efficiente l'inversa di una matrice.

Teorema *Sia A una matrice quadrata di ordine n, e si consideri la matrice*

$$[A|I_n]$$

ottenuta affiancando ad A la matrice I_n unita' di ordine n. Se, applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss-Jordan si ottiene una matrice della forma

$$[I_n|B],$$

allora A e' invertibile e

$$B = A^{-1}.$$

Altrimenti, A non e' invertibile.

Illustrazione Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Affiancando ad A la matrice unita' I_3 otteniamo:

$$[\ A \mid I_3\ ] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Operando operazioni elementari per righe, possiamo trasformato la matrice il blocco si sinistra in una matrice triangolare superiore

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Osserviamo che, in realta', abbiamo trasformato il blocco di siistra in una matrice triangolare superiore non degenere, e possiamo affermare che A possiede inversa.

Possiamo proseguire e trasformare il blocco di sinistra nelle matrice unita', ottenendo

$$\left[\ I_3 \mid B\ \right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Dunque A possiede inversa

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

6. **Potenze**

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero realtivo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ la potenza $p-$ma della matrice A e' definita da

$$A^p = \begin{array}{lll} A\ A\ \cdots\ A & (p\ volte) & per\ p > 0 \\ \\ I_n & & per\ p = 0 \\ \\ A^{-1}\ A^{-1}\ \cdots\ A^{-1} & (-p\ volte) & per\ p < 0 \end{array} \quad ;$$

le potenze con esponente negativo sono dunque definite solo per matrici invertibili.

Esempio:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]^{-2} &= \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{rr} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{rl} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Valgono le usuali proprieta' delle potenze:

$A^p A^q = A^{p+q}$;

$(A^p)^q = A^{pq}$;

la proprieta'

$(AB)^p = A^p B^p$

vale sotto al condizione che A e B siano permutabili, cioe' $AB = BA$.