Matematica II, 21.11.08

1. **Equazioni alle differenze finite**

   Consideriamo un "sistema" caratterizzato da una variabile reale x, che in uno "stato iniziale" assume un certo valore

   $x_0 = b,$

   e che nel passaggio da un "tempo" $t-1$ ad un "tempo successivo" t si evolve secondo una legge del tipo

   $x_t = ax_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots$

   dove $a \in \mathbb{R}$ e' un numero reale assegnato. Si avra' cosi' che

   $x_1 = ax_0 = ab$

   $x_2 = ax_1 = a^2 b$

   $\vdots$

   $x_t = ax_{t-1} = a^t b$

   $\vdots$

   e, nel caso $b \neq 0$,

   $$lim_{t\to\infty} x_t = lim_{t\to\infty} a^t b = \begin{array}{cc} \infty & se\ a < 1 \\ 0 & se\ -1 < a < 1 \\ b & se\ a = 1 \\ \infty & se\ a > 1 \end{array},$$

   e tale limite non esiste per $a = -1$.

   Consideriamo ora un "sistema" caratterizzato da una coppia ordinata (x, y) di variabili reali, che in uno "stato iniziale" assume un certo valore

   $$\begin{array}{l} x_0 = b \\ y_0 = c \end{array},$$

   e che nel passaggio da un "tempo" $t-1$ ad un "tempo successivo" t si evolve secondo una legge del tipo

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} x_t & = & a_{11}x_{t-1} + a_{12}y_{t-1} \\ y_t & = & a_{21}x_{t-1} + a_{22}y_{t-1} \end{array} \right. \qquad t = 1, 2, \ldots$$

   dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sono numeri reali assegnati. Si possono ancora dare delle formule per i valori delle variabili al tempo t in funzione dei valori iniziali b, c e delle costanti a_{ij}, ma in pratica conviene seguire altre vie.

   L'idea e' di trovare, quando possibile, un modo di ricondursi al caso particolarmente semplice in cui ogni variabile si trasformi indipendentemente dall'altra, descritto da una relazione del tipo

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} x_t & = & a_1 x_{t-1} \\ y_t & = & a_2 y_{t-1} \end{array} \right. \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

per la quale si ha

$$\begin{cases} x_t = a_1^t b \\ y_t = a_2^t c \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

Il formalismo matriciale permette di esprimere il problema in una forma adatta per una generalizzazione. Consideriamo ora un "sistema" caratterizzato da una colonna $\underline{x}$ di n variabili reali, che in uno "stato iniziale" assume un certo valore

$\underline{x}_0 = \underline{b}$,

e che nel passaggio da un "tempo" $t-1$ ad un "tempo successivo" t si evolve secondo una legge del tipo

$\underline{x}_t = A\underline{x}_{t-1} \qquad t = 1, 2, \ldots$

dove A e' una matrice quadrata di ordine n assegnata. Si avra' cosi' che

$\underline{x}_1 = A\underline{x}_0 = A\underline{b}$

$\underline{x}_2 = A\underline{x}_1 = A^2\underline{b}$

$\vdots$

$\underline{x}_t = A\underline{x}_{t-1} = A^t\underline{b}$

$\vdots$

Non e' difficile dare delle formule per le potenze di una matrice, ma in pratica conviene seguire altre vie.

L'idea e' di trovare, quando possibile, un modo di ricondursi al caso particolarmente semplice in cui la matrice sia diagonale.

2. Una matrice quadrata, come

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

nella quale tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, viene detta *matrice diagonale.* Possiamo rappresentare una qualsiasi matrice diagonale di ordine n come

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

scrivendo solo gli elementi sulla diagonale.

Si verifica che premoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna riga di A per il corrispondente elemento diagonale di D :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(1,:) \\ \hline A(2,:) \\ \hline \vdots \\ \hline A(n,:) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 A(1,:) \\ \hline a_2 A(2,:) \\ \hline \vdots \\ \hline a_n A(n,:) \end{bmatrix}$$

Si verifica che postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna colonna di A per il corrispondente elemento diagonale di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A(:,1) & A(:,2) & \dots & A(:,n) \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 A(:,1) & a_2 A(:,2) & \dots & a_n A(:,n) \end{array}\right]$$

In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{bmatrix}$$

Piu' in particolare, la potenza $t-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $t-$ma sono le potenza $t-$ma degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_1^t & & & \\ & a_2^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^t \end{bmatrix}$$

3. Mostriamo ora su un esempio come il calcolo delle potenze di una matrice non diagonale possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.

   Sia data la matrice
   $$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

   Ci sono delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice: una e'
   $\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,
   in quanto
   $$A\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{u};$$

   un'altra e'

$\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$
in quanto

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\ \underline{v}.$$

In entrambi i casi, A agisce come la moltiplicazione per un numero reale:

$$A\underline{u} = 1\ \underline{u}, \qquad A\underline{v} = 0.5\ \underline{v}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] &= \left[\ A\underline{u} \mid A\underline{v}\ \right] \\ &= \left[\ \quad \underline{u} \mid 0.5\ \underline{v}\ \right] \\ &= \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$P = \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$
\begin{aligned}
A &= PDP^{-1} \\
A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} = \; PD^2P^{-1} \\
A^3 &= PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\
&\vdots \\
A^t &= PDP^{-1}PD^{t-1}P^{-1} = PD^tP^{-1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Cosi' abbiamo

$$
\begin{aligned}
A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & (0.5)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\
&= ...
\end{aligned}
$$

Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
lim_{t \to \infty} A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4. In generale, data una matrice A quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice ...

   Definizione *Se la matrice A agisce su una colonna non nulla $\underline{v} \in R^{n\times 1}$ come la moltiplicazione per un numero reale λ*

   $$A\underline{v} = \lambda \underline{v},$$

   allora si dice che $\underline{v} \in R^{n\times 1}$ e' un autovettore di A e che λ e' un autovalore di A.

   Se la matrice A possiede n autovettori [1] $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cioe'

   $$A\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_1, \quad A\underline{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_2, \quad \ldots \quad A\underline{v}_n = \lambda_n\underline{v}_n,$$

[1] potrebbe non possederne alcuno.

allora si ha

$$
\begin{aligned}
A\left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \quad \underline{v}_n\ \right] &= \left[\ A\underline{v}_1 \mid A\underline{v}_2 \mid \dots \quad A\underline{v}_n\ \right] \\
&= \left[\ \lambda_1\underline{v}_1 \mid \lambda_2\underline{v}_2 \mid \dots \quad \lambda_n\underline{v}_n\ \right] \\
&= \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \quad \underline{v}_n\ \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Indichiamo con P

$$P = \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \quad \underline{v}_n\ \right]$$

la matrice avente come colonne gli n autovettori $\underline{v}_i$, ed indichiamo con D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.
Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Se capita che la matrice

$$P = \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \quad \underline{v}_n\ \right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, [2] allora possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$A^t = PD^tP^{-1}.$$

[2]potrebbe non esistere alcuna matrice invertibile con colonne autovettori.

5. **Addizione di due matrici.**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B, si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice somma di A e B ed indicata con

$$A + B.$$

In simboli, si ha

$$(A+B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j), \qquad i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n.$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 11 & 15 \\ 14 & 18 \end{bmatrix}$$

Nel caso $m = n = 1$ abbiamo l'usuale somma di numeri reali. L'addizione di matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ possiede le stesse proprieta', associativa e commutativa, dell'addizione di numeri reali. Il ruolo che il numero zero gioca per l'addizione di numeri reali, per le matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ e' giocato dalla matrice nulla

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

di tipo $m \times n$, nel senso che

$$0 + A = A = A + 0, \qquad \textit{per ogni } A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

6. **Prodotto di un numero reale per una matrice**

Date una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ di tipo $m\times n$, e dato uno scalare r in $\mathbb{R}$, moltiplicando ciascun elemento di A per lo scalare r si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice prodotto della matrice A per lo scalare r, ed indicata con

$$rA.$$

In simboli, si ha

$$(rA)(i,j) = rA(i,j) \qquad i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n.$$

Esempio:

$$7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione o la postmoltiplicazione di A per opportune matrici.

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \end{bmatrix} &= 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In generale, la moltiplicazione di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione di A per la matrice rI_m oppure come la postmoltiplicazione di A per la matrice rI_n :

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

Per questa ragione, le matrici rI vengono dette *matrici scalari.*

Da queste considerazioni segue che in generale, per i vettori colonna e' meglio scrivere gli scalari a destra, e per i vettori riga e' meglio scrivere gli scalari a sinistra.

7. L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{aligned} (A+B)C &= AC + BC \\ B(C+D) &= BC + BD \end{aligned}$$

per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.

Le operazioni di prodotto di matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice sono legate dalla proprieta'

$$r(PQ) = (rP)Q = P(rQ)$$

per ogni P, Q matrici moltiplicabili ed ogni scalare r.

Verifichiamo la prima proprieta' nel caso in cui A e B siano vettori riga in $\mathbb{R}^{1 \times n}$ e C sia un vettore colonna in $\mathbb{R}^{n \times 1}$:

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & \dots & a_n+b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_1+b_1)c_1 + \cdots (a_n+b_n)c_n;$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n + a_1c_1 + \cdots + a_nc_n.$$

I due risultati sono uguali per la proprieta' distributiva della moltiplicazione di numeri reali rispetto all'addizione.

8. **Matrice trasposta**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con

$$A^T.$$

In simboli, si ha:

$$A^T(i,j) = A(j,i), \qquad i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m.$$

Ad esempio, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

$\left(A^T\right)^T = A,$

per ogni matrice A;

$(A+B)^T = A^T + B^T$

per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

$(AB)^T = B^T A^T$

per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

$(rA)^T = rA^T$

per ogni matrice A ed ogni scalare r.

Dimostriamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

$$(AB)^T = B^T A^T$$

e' consistente, cioe' che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti, da un lato, la matrice AB e' definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)^T$ ha tipo $p \times m$; dall'altro, la matrice B^T ha tipo $p \times n$, la matrice A^T ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^T A^T$ e' definita ed ha tipo $p \times m$.

Proviamo ora che

$$(AB)^T(i,j) = \left(B^T A^T\right)(i,j), \qquad i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned}(AB)^T(i,j) &= (AB)(j,i) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(j,h)B(h,i),\end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\begin{aligned}\left(B^T A^T\right)(i,j) &= \sum_{h=1}^{n} B^T(i,h)A^T(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} B(h,i)A(j,h),\end{aligned}$$

e i due risultati sono uguali per la proprieta' commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Per finire, osserviamo che una matrice quadrata A e' invertibile se e solo se la sua trasposta A^T e' invertibile, inoltre l'inversa della trasposta e' la trasposta dell'inversa:

$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Ad esempio, da

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix},$

segue

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}.$

La verifica di questa proprieta' e' tutta nelle tre righe seguenti:

$AB = I_n = BA$

$(AB)^T = (I_n)^T = (BA)^T$

$B^T A^T = I_n = A^T B^T.$