Matematica II, 24.11.08

1. Sia n un intero positivo fissato. Data la generica matrice A quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

considieriamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

avente matrice dei coefficienti A e termini noti tutti nulli. Un tale sistema ha sempre almeno una soluzione, quella in cui tutte le incognite sono nulle

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \vdots \qquad , \\ x_n = 0 \end{array}$$

detta *soluzione banale*.

Mostreremo che la soluzione banale e' l'unica soluzione del sistema omogeneo se e solo se non si annulla un certo polinomio nei coefficienti a_{ij} della matrice A. Questo polinomio viene detto *determinante* di A, e viene indicato con

$$DetA.$$

2. Per $n = 1$, la generica matrice quadrata di ordine 1 consiste di un solo elemento

$A = [a]$,

e l'equazione lineare omogenea

$ax = 0$

con coefficiente a ha l'unica soluzione $x = 0$ se e solo se $a \neq 0$.

Definiamo il determinante $DetA$ della generica matrice quadrata del primo ordine A ponendo:

$$DetA = Det[a] = a.$$

3. Per $n = 2$, data la generica matrice quadrata del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

consideriamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti A.

Osserviamo che possiamo combinare linearmente le due equazioni in modo da ottenere una nuova equazione che non contenga l'incognita y :

$$\begin{aligned} (ax+by)d-(cx+dy)b &= 0d-0b \\ (ad-cb)x &= 0, \end{aligned}$$

e possiamo combinare linearmente le due equazioni in modo da ottenere una nuova equazione che non contenga l'incognita x :

$$\begin{aligned} (ax+by)c-(cx+dy)a &= 0c-0a \\ (bc-da)y &= 0. \end{aligned}$$

Possiamo allora osservare che, se

$$ad-cb \neq 0,$$

allora il sistema lineare omogeneo ha solo la soluzione banale $x=y=0$. Si puo' provare che vale anche il viceversa.

Definiamo il determinante $DetA$ della generica matrice quadrata del secondo ordine A ponendo:

$$DetA = Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad-cb.$$

Si osservi che

$$DetA^T = DetA.$$

4. Possiamo parametrizzare una matrice del secondo ordine con 4 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 2 vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}, \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$DetA = Det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del secondo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned} Det \begin{bmatrix} ra & b \end{bmatrix} &= rDet \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\ Det \begin{bmatrix} a & rb \end{bmatrix} &= rDet \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\ Det \begin{bmatrix} a+b & c \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix} \\ Det \begin{bmatrix} a & b+c \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} \\ Det \begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix} &= 0 \\ Det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} &= -Det \begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix} \\ Det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= 1 \end{aligned}$$

per ogni a, b, c vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Ad esempio, la prima proprieta' si puo' verificare cosi':

$$\begin{aligned} Det \begin{bmatrix} ra & b \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= ra_1 b_2 - ra_2 b_1 = r\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= rDet \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= rDet \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La terzultima proprieta' si verica immediatamente:

$$Det \begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0.$$

5. Data la generica matrice A del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix},$$

consideriamo il generico sistema lineare che ammette A come matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

e sintetizzare nella forma

$$ax + by = c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Osserviamo che una soluzione del sistema deve essere anche una soluzione dell'equazione

$$Det \begin{bmatrix} ax + by & b \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} c & b \end{bmatrix},$$

al cui primo membro si ha

$$\begin{aligned} Det \begin{bmatrix} ax + by & b \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} ax & b \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} by & b \end{bmatrix} \\ &= xDet \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + yDet \begin{bmatrix} b & b \end{bmatrix} \\ &= xDet \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x

$$xDet \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} c & b \end{bmatrix},$$

e in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$y Det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}.$$

Se $DetA \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente entrambe le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x &= \frac{Det \begin{bmatrix} c & b \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}} \\ y &= \frac{Det \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

Si verifica che questa e' davvero una soluzione.

Abbiamo cosi' ottenuto la *regola di Cramer* per la risoluzione dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

Consideriamo, ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Il determinate della matrice dei coefficienti e'

$$Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3,$$

dunque possiamo applicare la regola di Cramer: il sistema e' determinato, e la dua soluzione e' data da

$$\begin{aligned} x &= \frac{Det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1 \\ y &= \frac{Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2. \end{aligned}$$

6. Il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine puo' essere definito come il risultato comune di sei espressioni, una per ciascuna colonna e una per ciascuna riga della matrice, dette *sviluppi di Laplace* del determinate.

   Ad esempio, per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

   il determinante di A e' dato da uno qualsiasi dei i seguenti sviluppi di Laplace.

- Secondo la prima colonna:

$$1 \cdot Det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} - 4 \cdot Det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + 7 \cdot Det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \cdot 10 - 8 \cdot 6 - 4(2 \cdot 10 - 8 \cdot 3) + 7(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -3$$

- Secondo la seconda colonna:

$$-2 \cdot Det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} + 5 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} - 8 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= -2(4 \cdot 10 - 7 \cdot 6) + 5(1 \cdot 10 - 7 \cdot 3) - 8(1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = -3$$

- Secondo la terza colonna:

$$3 \cdot Det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 6 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 10 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) - 6(1 \cdot 8 - 7 \cdot 2) + 10(1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = -3$$

In sintesi, lo svipuppo di Laplace del determinante di A secondo la $j-$ma colonna e' una somma algebrica, cioe' con segni, di tre termini: l'$i-$mo termine della somma e' il prodotto dell'$i-$mo elemento della colonna per il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna; il segno e' + o - secondoche $i + j$ e' pari o dispari.

Analogamente, lo svipuppo di Laplace del determinante di A secondo la $i-$ma riga e' una somma algebrica, cioe' con segni, di tre termini: il $j-$mo termine della somma e' il prodotto del $j-$mo elemento della riga per il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la $j-$ma colonna e la $i-$ma riga; il segno e' + o - secondoche $i + j$ e' pari o dispari.

7. Consideriamo la generica matrice quadrata del terzo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Lo sviluppo di Laplace del determinate di A secondo la prima colonna e'

$$a_1 \cdot Det \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \cdot Det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \cdot Det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

Lo stesso polinomio si ottine da ciascuno degli altri sviluppi di Laplace, e cosi' poniamo

$$DetA = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

8. Osserviamo che

$$DetA = \sum_{(i_1,i_2,i_3)} sg(i_1i_2i_3)\ a_{i_1}b_{i_2}c_{i_1},$$

dove le terne (i_1, i_2, i_3) variano fra le permutazioni della terna $(1, 2, 3)$, e $sg(i_1i_2i_3)$ e' il segno della permutazione (i_1, i_2, i_3).

Una parola $i_1i_2i_3$ nei simboli $1, 2, 3$ che contenga ciascun simbolo esttamente una volta viene detta *permutazione* dell'insieme dei simboli $1, 2, 3$. Una coppia di simboli i_pi_q con $p < q$ e $i_p > i_q$ viene detta *inversione* della permutazione $i_1i_2i_3$; il segno

$sg(i_1i_2i_3)$

della permutazione e' $+1$ se il numero delle sue inversioni e' pari ed e' -1 se il numero delle sue inversioni e' dispari.

permutazione	*inversioni*	*numero inversioni*	*segno*
123		0	$+$
132	32	1	$-$
213	21	1	$-$
231	$21, 31$	2	$+$
312	$31, 32$	2	$+$
321	$32, 31, 21$	3	$-$

Una parola $i_1i_2 \ldots i_n$ nei simboli $1, 2, \ldots, n$ che contenga ciascun simbolo esttamente una volta viene detta *permutazione* dell'insieme dei simboli $1, 2, \ldots, n$. Una coppia di simboli i_pi_q con $p < q$ e $i_p > i_q$ viene detta *inversione* della permutazione $i_1i_2 \ldots i_n$; il segno

$sg(i_1i_2 \ldots i_n)$

della permutazione e' $+1$ se il numero delle sue inversioni e' pari ed e' -1 se il numero delle sue inversioni e' dispari.