Matematica II, 26.11.08

1. Possiamo parametrizzare una matrice del terzo ordine con 9 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 3 vettori colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$\mathrm{Det}A = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} ra & b & c \end{bmatrix} & = & r\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & rb & c \end{bmatrix} & = & r\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & rc \end{bmatrix} & = & r\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a+f & b & c \end{bmatrix} & = & \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} f & b & c \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b+g & c \end{bmatrix} & = & \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & g & c \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c+h \end{bmatrix} & = & \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & h \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & a & b \end{bmatrix} & = & 0 \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & b \end{bmatrix} & = & 0 \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & a \end{bmatrix} & = & 0 \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} & = & -\mathrm{Det}\begin{bmatrix} b & a & c \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} & = & -\mathrm{Det}\begin{bmatrix} c & b & a \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} & = & -\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & c & b \end{bmatrix} \\
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = & 1
\end{array}$$

per ogni a, b, c, f, g, h vettori colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Possiamo parametrizzare una matrice del terzo ordine anche con 3 vettori riga in $\mathbb{R}^{1\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad a', b', c' \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^{1\times 3}$:

$$\mathrm{Det}A = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \qquad a', b', c' \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato da proprieta' analoghe a quelle sopra elencate.

2. Le proprieta' del determinate elencate nel punto precedente ci permettono di descrivere l'effetto che ciascuna delle operazioni elementari sulle righe di una matrice ha sul determinante della matrice:

   - l'operazione di scambiare due righe ha come effetto di cambiare il segno del determinante;
   - l'operazione di moltiplicare una riga per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha come effetto di moltiplicare il determinante per r;
   - l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante.

   Le prime due affermazioni sono chiare. Verifichiamo la terza, nel caso delle prime due righe.

   $$A = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a' \\ b' + ra' \\ c' \end{bmatrix}$$

   $$\begin{aligned} \text{Det } B &= \text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ b' + ra' \\ c' \end{bmatrix} \\ &= \text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} + r\text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ a' \\ c' \end{bmatrix} \\ &= \text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \text{Det } A. \end{aligned}$$

   Grazie a questa proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica A trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare superiore B, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di B, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

   Ad esempio:

   $$\text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{bmatrix} = \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -10 \end{bmatrix} = \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -6.$$

3. Consideriamo il generico sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

   $$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = p_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = p_2 \\ a_2 x + b_2 y + c_3 z = p_3 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

e sintetizzare nella forma

$$ax + by + cz = p, \qquad a, b, c, p \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Da questa equazione vettoriale colonna di puo' dedurre l'equazione scalare

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} ax+by+cz & b & c \end{bmatrix} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} p & b & c \end{bmatrix}.$$

Ora, al primo membro si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\begin{bmatrix} ax+by+cz & b & c \end{bmatrix} &= \mathrm{Det}\begin{bmatrix} ax & b & c \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} by & b & c \end{bmatrix} + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} cz & b & c \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} x + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} b & b & c \end{bmatrix} y + \mathrm{Det}\begin{bmatrix} c & b & c \end{bmatrix} z \\ &= \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} x, \end{aligned}$$

e cosi' abbiamo l'equazione

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} x = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} p & b & c \end{bmatrix}$$

nella sola incognita x.

In modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} y = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & p & c \end{bmatrix},$$

e l'equazione nella sola incognita z

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} z = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & p \end{bmatrix}.$$

Ora, sotto la condizione $\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \neq 0$, possiamo ricavare univocamente le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} p & b & c \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}} \\ y &= \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & p & c \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}} \\ z &= \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & p \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

Si puo' verificare che questa e' davvero una soluzione.

Abbiamo cosi' ottenuto la *regola di Cramer* per la risoluzione dei sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite.

4. **Applicazione.**

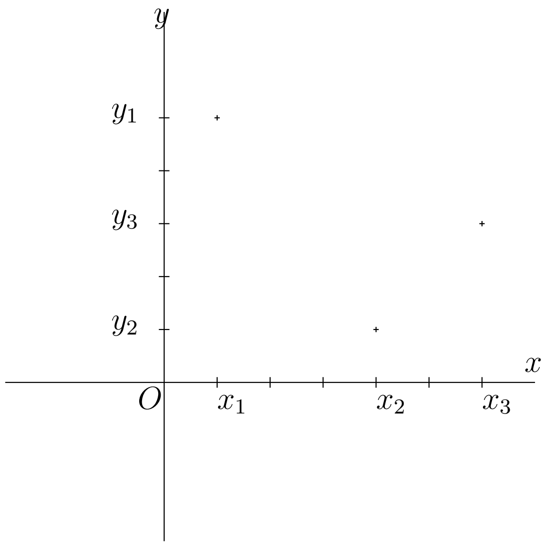
Sono dati sei numeri reali $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$, e si vuole determinare un polinomio

$f(x) = a + bx + cx^2$

tale che

$f(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$

Ci si chiede: sotto quali condizioni esiste un tale polinomio? nei casi in cui esiste, ne esiste esattamente uno? nei casi in cui ne esiste esattamente uno, in che modo i coefficienti del polinomio dipendono dai dati iniziali?



Per evitare condizioni fra loro contraddittorie, o ripetute, imponiamo la condizione che i tre numeri x_1, x_2, x_3 siano a due a due distinti:

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3.$

Ora, le tre condizioni imposte si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a + bx_1 + cx_1^2 & = y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 & = y_2 \\ a + bx_3 + cx_3^2 & = y_3 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c. Calcoliamo ora il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{aligned}
det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} &= det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \\
&= det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
\end{aligned}$$

Sotto le condizioni imposte

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3,$

questo determinante e' non nullo. Dunque il sistema lineare ha, per ogni valore di y_1, y_2, y_3, esattamente una soluzione, data da

$$\begin{aligned}
a &= \frac{det \begin{bmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}} \\
b &= \frac{det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}} \\
c &= \frac{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}.
\end{aligned}$$

Svolgiamo i calcoli solo per l'incognita c; otteniamo:

$$c = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

5. **Applicazione.**

Consideriamo la generica matrice del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e chiediamoci sotto quali condizioni sui parametri a, b, c, d sia invertibile, e sotto tali condizioni come sia fatta la matrice inversa.

Ora, A sara' invertible se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} ap + bq = 1 \\ cp + dq = 0 \\ ar + bs = 0 \\ cr + ds = 1 \end{cases}.$$

Questo sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite in realta' consiste di due sistemi, di due equazioni in due incognite ciascuno.

Ora, sotto la condizione

$$\mathrm{Det}A = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

la regola di Cramer assicura che entrambi i sistemi sono determinati, la soluzione del primo e' data da

$$p = \frac{det \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{d}{ad-bc},$$

$$q = \frac{det \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{-c}{ad-bc},$$

la soluzione del secondo e' data da

$$r = \frac{det \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{-b}{ad-bc},$$

$$s = \frac{det \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{a}{ad-bc}.$$

Cosi' c'e' una ed una sola matrice B inversa destra di A. Si verifica che B e' anche inversa sinistra di A.

Dunque, sotto la condizione

$$\mathrm{Det}A = ad - bc \neq 0,$$

A e' invertibile, e la sua inversa e' data da

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Si verifica infine che, se

$$\mathrm{Det}A = ad - bc = 0,$$

allora A non e' invertibile.

6. **Esercizio.** Si determini il polinomio

   $f(x) = a + bx + cx^2$

   tale che

   $f(1) = 5, \quad f(4) = 1, \quad , f(6) = 3.$

7. **Esercizio.** Si calcoli l'inversa della matrice

   $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   e si verifichi la correttezza del risultato trovato.