Matematica II, 28.11.08

Determinanti di ordine n

In questa prima parte descriviamo, senza dimostrazioni ne' esempi, come le considerazioni svolte nelle lezioni precedenti sui determinanti del secondo e terzo ordine si possano estendere ai determinanti di un qualsiasi ordine $n \geq 1$.

1. **Definizione ricorsiva.**

   Definiamo il determinante di una matrice quadrata di un qualsiasi ordine $n \geq 1$ in modo ricorsivo. Per $n = 1$, poniamo

   - per ogni matrice A di ordine 1,

   $$Det\ A \ = \ unico\ elemento\ di\ A;$$

   Per $n > 1$, supponiamo di avere definito il determinante per una qualsiasi matrice di ordine $n-1$, e definiamo il determinante per una qualsiasi matrice di ordine n.

   Sia

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   la generica matrice di ordine $n > 1$. Per ciascuna scelta di un indice di riga $i = 1, \dots, n$ e di un indice di colonna $j = 1, \dots, n$, cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna di A otteniamo una sottomatrice di ordine $n-1$. Il determinante di questa sottomatrice, preso col suo segno o col segno opposto secondoche $i+j$ sia pari o dispari, viene detto *complemento algebrico* $(i,j)-$mo della matrice A e viene indicato col simbolo A_{ij}. In simboli, si ha

   $$A_{ij} = (-1)^{i+j} Det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \widehat{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \widehat{a_{i1}} & \dots & \dots & \widehat{a_{ij}} & \dots & \widehat{a_{in}} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \widehat{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

   dove con un simbolo come $\widehat{a}$ si indica un elemento cancellato.

   Poniamo

   $$Det\ A \ = \ \begin{array}{l} somma\ dei\ prodotti\ degli \\ elementi\ di\ una\ colonna\ di\ A\ per \\ i\ rispettivi\ complementi\ algebrici \end{array}.$$

In simboli:

$$\begin{aligned} Det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{n2}A_{n2} \\ &\vdots \\ &= a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \cdots + a_{nn}A_{nn} \end{aligned}$$

Queste espressioni vengono dette sviluppi di Laplace del determinante di A secono la prima, seconda, ..., $n-$ma colonna. Tutti gli sviluppi di Laplace portano allo stesso risultato; questo e' un fatto non banale.

Equivalentemente, si puo' anche porre

$$Det\ A \ = \ \begin{array}{l} \textit{somma dei prodotti degli} \\ \textit{elementi di una riga di } A \textit{ per} \\ \textit{i rispettivi complementi algebrici} \end{array}.$$

Risulta che il determinante di una matrice e' uguale al determinante della sua trasposta:

$$DetA = DetA^T.$$

Esempio

Usando sempre lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna (oppure sempre rispetto all'ultima riga), si trova che il determinante di una matrice triangolare superiore e' il prodotto dei suoi elementi diagonali:

$$Det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. **Formula esplicita.**

Il determinante della generaica matrice $A = [a_{ij}]$ di ordine n si puo' definire esplicitamente ponendo

$$DetA = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} sg(i_1 i_2 \dots i_n)\ a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

dove $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ varia fra le permutazioni della $n-$pla $(1, 2, \dots, n)$, e $sg(i_1 i_2 \dots i_n)$ e' il suo segno. Cosi', il determinante di A e' un polinomio omogeneo di grado n nelle componenti di A, costituito da $n!$ termini.

3. **Proprieta' dei determinanti.**

Sia n un intero positivo arbitrariamenente fissato. La funzione dall'insieme delle matrici di ordine n verso i numeri reali che ad ogni matrice associa il suo determinante gode delle seguenti proprieta':

- Se A e B sono due matrici, in tutto uguali, tranne che in una colonna, e se il vettore che la occupa in A e' r $(\in R)$ volte il vettore che la occupa in B, allora
$$Det\ A = r\ Det\ B;$$
- Se A, B, C sono tre matrici, in tutto uguali, tranne che in una colonna, e se il vettore che la occupa in A e' la somma dei vettori che la occupano in B e C, allora
$$Det\ A = Det\ B + Det\ C;$$
- Se A e' una matrice in cui due colonne distinte sono occupate da vettori uguali, allora
$$Det\ A = 0;$$
- Se una matrice A e' ottenuta da una matrice B scambiando due colonne, allora
$$Det\ A = -Det\ B.$$
- Per la matrice unita' I_n si ha
$$Det\ I_n = 1.$$

Valgono analoghe proprieta' per le righe.

4. **Determinanti, operazioni elementari e algoritmo di Gauss.**

Le proprieta' del determinate elencate nel punto precedente ci permettono di descrivere l'effetto che ciascuna delle operazioni elementari sulle righe di una matrice ha sul determinante della matrice:

- l'operazione di moltiplicare una riga per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha come effetto di moltiplicare il determinante per r;
- l'operazione di scambiare due righe ha come effetto di cambiare il segno del determinante;
- l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante.

Grazie a queste proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica A trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare superiore B, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di B, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

5. **Regola di Cramer.**

I determinanti permettono di dare una formula per la risoluzione di un sistema lineare "quadrato." Sia data una matrice A quadrata di ordine n, con $DetA \neq 0$. Allora tutti i sistemi lineari
$$Ax = b$$
con matrice dei coefficienti A sono determinati; inoltre
$$x_i = \frac{Det\ A_i}{Det\ A}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

dove A_i e' la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $i-$ma con la colonna b dei termini noti.

6. **Matrice inversa.**

   I determinanti permettono di dare una formula per la matrice inversa di una matrice quadrata. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad con\ Det\ A \neq 0,$$

   Allora A e' invertibile, e la sua inversa e' data da

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

   dove A_{ij} e' il complemento algebrico $(i, j)-$mo della atrice A.

Riassunto dei risultati finora presentati.

Possiammo riassumere gran parte dei risultati finora presentati nel diagramma seguente. Il simbolo A sta per una qualsiasi matrice quadrata; la scrittura $A \sim T$ significa "l'algoritmo di Gauss trasforma A in una matrice triangolare T con elementi diagonali non nulli"; ciascuna freccia sta per un teorema, ad esempio la freccia che va dalla scrittura $DetA \neq 0$ verso la scrittura $Ax = b$ *determinato* $\forall b$ sta per il teorema "se $DetA \neq 0$, allora $Ax = b$ *determinato* $\forall b$".

$$\begin{tikzcd}
 & & A \sim T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{l} Ax = 0 \\ determinato \end{array} & \begin{array}{l} Ax = b \\ determinato\ \forall b \end{array} \arrow[l] \arrow[rr, shift right] & & \exists A^{-1} \arrow[ll, shift right] \\
 & & DetA \neq 0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

In realta' valgono anche altri teoremi, che permettono di completare il quadro nel modo seguente:

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \sim T & \\
\begin{array}{l} Ax = 0 \\ \textit{determinato} \end{array} \arrow[r, leftrightarrow] & \begin{array}{l} Ax = b \\ \textit{determinato } \forall b \end{array} \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \exists A^{-1} \arrow[ul, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
 & & DetA \neq 0 &
\end{tikzcd}
$$

Cosi', le proposizioni $Ax = 0$ *determinato*, $Ax = b$ *determinato* $\forall b$, $\exists A^{-1}$, $A \sim T$, $DetA \neq 0$ sono tutte equivalenti, nel senso che se per una certa matrice A una di esse e' vera, allora sono vere tutte le altre, e se per una certa matrice A una di esse e' falsa, allora sono false tutte le altre. In particolare, si ha il teorema *"per una qualsiasi matrice quadrata A, il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha una soluzione non banale se e solo se $DetA = 0$,"* teorema che risulta fondamentale per la teoria degli autovalori.

Una matrice che soddisfi una (e dunque tutte) queste condizioni si dice *non singolare.*

Autovalori e autovettori

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Ricordiamo che un vettore colonna non nullo $\underline{v} \neq \underline{0}$ si dice autovettore di A se A agisce su $\underline{v}$ come la moltiplicazione per uno scalare:

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}, \qquad \lambda \in R;$$

lo scalare λ si dice autovalore di A associato all'autovettore $\underline{v}$. Uno scalare si dice autovalore di A se e' l'autovalore associato a qualche autovettore di A.

Osserviamo che a ciascun autovettore e' associato un solo autovalore. Infatti, se λ e μ sono entrambi autovalori associati ad uno stesso autovettore $\underline{v}$ di A, cioe' se

$A\underline{v} = \lambda\underline{v}, \qquad A\underline{v} = \mu\underline{v},$

allora si ha l'uguaglianza

$\lambda\underline{v} = \mu\underline{v},$

che si puo' riscrivere nella forma

$(\lambda - \mu)\underline{v} = \underline{0}$,

che a sua volta, poiche' $\underline{v} \neq \underline{0}$, implica

$\lambda - \mu = 0, \qquad cioe' \qquad \lambda = \mu.$

2. Riconsideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix},$$

che possiede un autovettore

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

con autovalore associato $\lambda = 1$:

$$A\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \underline{u};$$

e possiede un autovettore

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con autovalore associato $\lambda = 0.5$:

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \cdot \underline{v}.$$

3. Iniziamo a chiederci come si possano ricavare degli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 0.5$. Tali autovettori sono i vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ caratterizzati dalla condizione

$$A\underline{x} = 0.5\underline{x},$$

che si puo' riscrivere

$$A\underline{x} - 0.5\underline{x} = \underline{0},$$

o

$$A\underline{x} - 0.5I_2\underline{x} = \underline{0},$$

o

$$(A - 0.5I_2)\underline{x} = \underline{0}.$$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0},$$

che si riduce alla sola equazione lineare omogenea

$x_1 + x_2 = 0.$

Ora, le soluzioni di questa equazione sono del tipo

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}, \qquad t \in R.$$

Questi vettori, con $t \neq 0$, sono tutti e soli gli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 0.5$; in particolare, per $t = -1$ ritroviamo l'autovettore $\underline{v}$.

4. Ci chiediamo ora come si possono determinare gli autovalori di A. Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ che soddisfano la condizione

   $A\underline{x} = \lambda\underline{x},$

   che si puo' riscrivere

   $A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0},$

   o

   $A\underline{x} - \lambda I_2\underline{x} = \underline{0},$

   o

   $(A - \lambda I_2)\underline{x} = \underline{0}.$

   Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

   $$\begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

   Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $\underline{x} \neq \underline{0}$. se e solo se

   $$Det \begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

   cioe' se e solo se λ e' soluzione dell'equazione di secondo grado

   $(0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.3 \cdot 0.2 = 0,$

   cioe'

   $\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.5 = 0.$

   Ora, le soluzioni di questa equazione sono

   $\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0.5.$

Abbiamo cosi' ritrovato i due autovalori della matrice A che sono associati agli autovettori $\underline{u}$ e $\underline{u}$; possiamo inoltre affermare che A non possiede altri autovalori al di fuori di 1 e 0.5.

5. Sia ora A una matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ che soddisfano la condizione

$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$,

che si puo' riscrivere

$A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0}$,

o

$A\underline{x} - \lambda I_n\underline{x} = \underline{0}$,

o

$(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}$.

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $\underline{x} \neq \underline{0}$. se e solo se λ e' soluzione dell'equazione

$$Det(A - \lambda I_n) = Det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Il polinomio che compare al primo membro di questa equazione e' detto *polinomio caratteristico* della matrice A; e' un polinomio di grado n pari all'orine della matrice.

Possiamo dunque infine dire che

- gli autovalori di una matrice A di ordine n sono le radici del polinomio caratteristico di A.