Matematica II, 10.12.08

Piani in $\mathbb{R}^3$

In questa parte, assumeremo di avere fissato nello spazio un sistema di riferimento con origine in un punto O, ed identificheremo vettori di $\mathbb{R}^3$ con vettori applicati in O.

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori
$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Poiche' u e v sono entrambi non nulli e non sono proporzionali, esiste uno ed un solo piano W che contiene u e v.

   Per ogni $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare
$$ur_1 + vr_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} r_2$$
e' ancora un vettore che giace sul piano W. In realta' ogni vettore che giace sul piano W si puo' ottenere in questo modo.

   L'espressione
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} r_2$$
fornisce, al variare di r_1 e r_2 in $\mathbb{R}$, tutti e soli i vettori che giacciono su W.

   E' dunque immediato produrre vettori che stiano su W. Ad esempio: ponendo $r_1 = 1$ e $r_2 = 0$, si riottiene u; ponendo $r_1 = 0$ e $r_2 = 1$, si riottiene v; ponendo $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$, si ottiene $u + v$; ...

   Meno immediato e' decidere se un dato vettore stia o no su W. Chiediamoci ad esempio se il vettore
$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$
sta o no su W. Ora, b sta su W se e solo se esistono due scalari r_1, r_2 tali che $b = ur_1 + vr_2$, cioe'
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} r_2.$$
In altri termini, b sta su W se e solo se il sistema lineare nelle incognite r_1, r_2

$$\begin{cases} 1 &= r_1 + 3r_2 \\ 1 &= 2r_1 + 2r_2 \\ 5 &= 3r_1 + r_2 \end{cases}$$

ha soluzioni. A questo sistema corrisponde la matrice completa

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right],$$

che viene trasformata dall'algoritmo di Gauss nella matrice

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} 1 &= r_1 + 3r_2 \\ -1 &= -4r_2 \\ 4 &= 0 \end{cases}$$

che e' impossibile. Dunque b non sta su W.

Possiamo anche chiederci sotto quali condizioni un vettore

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

sta sul piano W. Ora, b sta su W se e solo se esistono due scalari r_1, r_2 tali che $b = ur_1 + vr_2$, cioe'

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} r_2.$$

In altri termini, b sta su W se e solo se il sistema lineare nelle incognite r_1, r_2

$$\begin{cases} b_1 &= r_1 + 3r_2 \\ b_2 &= 2r_1 + 2r_2 \\ b_3 &= 3r_1 + r_2 \end{cases}$$

ha soluzione. Applicando alla matrice completa del sistema

$$\left[\begin{array}{rr|l} 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array}\right]$$

l'algoritmo di Gauss, si ottiene la matrice

$$\left[\begin{array}{rr|l} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} b_1 &= r_1 + 3r_2 \\ b_2 - 2b_1 &= -4r_2 \\ b_3 - 2b_2 + b_1 &= 0 \end{cases},$$

che ha soluzioni se e solo se

$$b_1 - 2b_2 + b_3 = 0.$$

2. Consideriamo l'equazione lineare omogenea

   $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

   nelle tre incognite x_1, x_2, x_3. Le soluzioni di questa equazione sono tutti e soli i vettori applicati in O che giacciono su un piano V, passante per O.

   E' immediato decidere se un vettore dato stia o meno sul piano V.

   Un po' meno immediato e' produrre vettori che stiano su V. Per farlo, possiamo risolvere l'equazione. Ricaviamo x_1

   $x_1 = -2x_2 - 3x_3$

   in funzione di x_2, x_3; le soluzioni del sistema sono date da

   $$\begin{cases} x_1 &= -2r_1 - 3r_2 \\ x_2 &= r_1 \\ x_3 &= r_2 \end{cases},$$

   dove gli scalari r_1, r_2 variano in $\mathbb{R}$. Possiamo riscrivere queste uguaglianze nella forma

   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_2$$

   e riconoscere che le soluzioni del sistema sono tutte e sole le combinazioni lineari di due vettori, entrambi non nulli e fra loro non proporzionali.

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo due vettori

   $$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix},$$

   non nulli e non proporzionali. Allora esiste uno ed un solo piano W passante per O che contiene a_1 e a_2.

   Per ogni $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare

   $$a_1 r_1 + a_2 r_2 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} r_2$$

   e' ancora un vettore che giace sul piano W. In realta' ogni vettore che giace sul piano W si puo' ottenere in questo modo. Diciamo che W e' *il piano generato dai vettori* a_1, a_2.

   Si ha che un vettore

   $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

   giace sul piano W se e solo se il sistema lineare nelle incognite r_1, r_2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

ha soluzione. Le equazioni di questo sistema vengono dette equazioni parametriche del piano.

Ogni piano passante per l'origine O del sistema di riferimento puo' essere rappresentato in questo modo.

4. Consideriamo la generica equazione lineare omogenea

   $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$

   nelle incognite x_1, x_2, x_3, dove uno almeno fra i tre coefficienti a, b, c e' $\neq 0$. Allora le soluzioni di questa equazione sono tutti e soli i vettori applicati in O che giacciono su un piano V, passante per O.

   Ogni piano passante per l'origine O del sistema di riferimento puo' essere rappresentato in questo modo.

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

1. **Definizione** *Siano dati dei vettori $a_1, \ldots, a_p$ in $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei vettori*

   $$a_1 r_1 + \cdots + a_p r_p \qquad (r_i \in \mathbb{R})$$

   che sono combinazione lineare dei vettori $a_1, \ldots, a_p$ si dice spazio generato dall'insieme $\{a_1, \ldots, a_p\}$, e viene indicato con

   $$\langle a_1, \ldots, a_p \rangle.$$

   Posto $V = \langle a_1, \ldots, a_p \rangle$, osserviamo che

   - il vettore nullo $0_n \in \mathbb{R}^n$ sta in V.
     Infatti, $0_n = a_1 0 + \cdots + a_p 0$;
   - ciascun vettore a_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sta in V.
     Infatti, $a_i = a_1 0 + \cdots + a_{i-1} 0 + a_i 1 + a_{i-1} 0 + \cdots + a_p 0$.
   - per ogni $u, v \in V$, anche $u + v \in V$. Infatti:
     $u \in V$ significa che esistono degli scalari $s_1, s_2, \ldots, s_p$ tali che
     $u = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_p s_p$;
     $v \in V$ significa che esistono degli scalari $t_1, t_2, \ldots, t_p$ tali che
     $v = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_p t_p$.
     Ora,

     $$u + v = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_p s_p + a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_p t_p = \\ a_1(s_1 + t_1) + a_2(s_2 + t_2) + \cdots + a_p(s_p + t_p)$$

     che significa che $u + v \in V$.

- per ogni $u \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, anche $ur \in V$.
  Infatti, si ha
  $ur = (a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_p s_p) r = a_1(s_1 r) + a_2(s_2 r) + \cdots + a_p(s_p r)$
  che significa che $u \in V$.

Osservazione

Posto $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad a_p = \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix}$, si ha che lo spazio $\langle a_1, \ldots, a_p \rangle$ e' costituito dai vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} r_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix} r_p = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}$$

ottenuti al variare di $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$, o piu' sinteticamente, dai vettori del tipo

$$Ar,$$

dove $A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_p \end{bmatrix}$ e' la matrice $n \times p$ avente per colonne i vettori a_i e r varia fra i vettori colonna $p \times 1$.

2. **Definizione** *Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che V e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se*

   - $0_n \in V$;
   - *per ogni $u, v \in V$, anche $u + v \in V$;*
   - *per ogni $u \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, anche $ur \in V$.*

   L'insieme $\{0_n\}$ costituito dal solo vettore nullo e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, cosi' come tutto l'insieme $\mathbb{R}^n$ e' un sottospazio di R^n.

   Identificato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, tramite la scelta di un sistema di riferimento con origine in un punto O, con lo spazio della geometria elementare, si ha che i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono: l'insieme ridotto all'origine O, le rette passanti per O, i piani passanti per O, l'intero spazio.

   In base a quanto osservato nel punto precedente, si ha che lo spazio $\langle a_1, \ldots, a_p \rangle$ generato da un insieme $\{a_1, \ldots, a_p\}$ di vettori di $\mathbb{R}^n$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Questo sottospazio si puo' descrivere sinteticamente nella forma

   $$\langle a_1, \ldots, a_p \rangle = \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^{p \times 1}\}$$

   dove A e' la matrice $n \times p$ avente per colonne i vettori a_i.

   Si prova che ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si puo' ottenere come sottospazio generato da un opportuno insieme di vettori.

3. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
di un certo numero q di equazioni in n incognite $x_1, \dots, x_n$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

   Infatti, rappresentato sinteticamente il sistema nella forma
$$Ax = 0_q, \qquad A \in \mathbb{R}^{q\times n},\ x \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ 0_q \in \mathbb{R}^{q\times 1},$$
si ha che

   - il vettore nullo 0_n di $\mathbb{R}^n$ e' una soluzione, la soluzione banale, del sistema.
   - se $u, v \in \mathbb{R}^n$ sono soluzioni del sistema, cioe' se
     $Au = 0_q, \qquad Av = 0_q,$
     allora
     $A(u + v) = Au + Av = 0_q + 0_q = 0_q,$
     cioe' anche $u + v$ e' una soluzione del sistema.
   - se $u \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione del sistema, cioe' se
     $Au = 0_q,$
     e se $r \in \mathbb{R}$ e' uno scalare, allora
     $A(ur) = (Au)r = 0_q r = 0_q,$
     cioe' anche ur e' una soluzione del sistema.

   Si prova che, risolvendo un sistema lineare omogeneo, se ne trova una rappresentazione come sottospazio generato da un certo insieme di vettori.

Indipendenza lineare

1. Tutti i concetti dati per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si possono dare anche per i suoi sottospazi. In particolare, dalla definizione di base di $\mathbb{R}^n$ si ottiene la seguente

   Definizione *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_p\}$ un insieme di vettori $a_i \in V$. Diciamo che l'insieme $\mathcal{A}$ e' una base per V se e solo se ogni $b \in V$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*
$$b = a_1 r_1 + \cdots + a_p r_p, \qquad (r_i \in \mathbb{R})$$
   dei vettori di $\mathcal{A}$. I coefficienti $r_1, \dots, r_n$ si dicono coordinate del vettore b rispetto alla base $\mathcal{A}$.

   Identificato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, tramite la scelta di un sistema di riferimento con origine in un punto O, con lo spazio della geometria elementare, si ha che: un qualsiasi vettore applicato in O, che sia non nullo, forma una base per la retta da esso generata, due qualsiasi vettori applicati in O, che siano non allineati, formano una base per il piano da essi generato.

2. **Proposizione** *Siano* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$ *e sia* $V = \langle a_1, \ldots, a_p \rangle$ *il sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *da essi generato. L'insieme* $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_p\}$ *e' una base per* V *se e solo se l'unica scrittura del vettore nullo* $0_n \in \mathbb{R}^n$ *come combinazione lineare dei vettori* $a_1, \ldots, a_p$ *e'*
$$a_1 0 + \cdots + a_p 0 = 0_n.$$

Infatti:

- Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia una base di V. Cio' significa che ogni vettore di V si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{A}$. Poiche' il vettore nullo $0_n \in \mathbb{R}^n$ e' un vettore di V, si ha che 0_n si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{A}$. Ora, e' sempre vero che
  $a_1 0 + \cdots + a_p 0 = 0_n$,
  dunque questa deve essere l'unica scrittura di 0_n come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{A}$.
- Supponiamo che l'unica scrittura del vettore nullo $0_n \in \mathbb{R}^n$ come combinazione lineare dei vettori $a_1, \ldots, a_p$ sia
  $a_1 0 + \cdots + a_p 0 = 0_n$.
  Sia dato un vettore $b \in V$. Cio' significa che b si puo' scrivere in almeno un modo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{A}$. Ora, se
  $b = a_1 r_1 + \cdots + a_p r_p, \qquad (r_i \in \mathbb{R})$
  $b = a_1 s_1 + \cdots + a_p s_p, \qquad (s_i \in \mathbb{R})$
  sono due scritture di b come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{A}$, sottraendo membro a membro si ha
  $0_n = a_1(r_1 - s_1) + \cdots + a_p(r_p - s_p)$.
  Per quanto stiamo supponendo, si ha dunque che
  $r_1 - s_1 = 0, \ \ldots, \ r_p - s_p = 0$,
  cioe'
  $r_1 = s_1, \ \ldots, \ r_p = s_p$.
  In definitiva, b si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{A}$. Questo vale per ogni $b \in V$, cosi' $\mathcal{A}$ e' una base di V.

3. **Definizione** *Diciamo che i vettori* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$ *sono linearmente indipendenti se e solo se l'unica scrittura del vettore nullo* $0_n \in \mathbb{R}^n$ *come combinazione lineare di* $a_1, \ldots, a_p$ *e'*
$$a_1 0 + \cdots + a_p 0 = 0_n.$$