Matematica II, 15.12.08

1. **Complemento ortogonale di un sottospazio.**

Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e' ortogonale al sottospazio V, e scriviamo $x \perp V$, se e solo se x e' ortogonale ad ogni vettore $v \in V$, in simboli

$x \perp V \qquad$ *se e solo se* $\qquad x \perp v, \ \forall v \in V.$

Diciamo che l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a V e' il *complemento ortogonale* di V, e indichiamo questo insieme con $V^\perp$, in simboli:

$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \perp v, \ \forall v \in V\}.$

Il complemento ortogonale $V^\perp$ di V e' a sua volta un sottospazio di V :

- $0_n \in V^\perp$, in quanto
  $v^T 0_n = 0, \quad \forall v \in V.$
- se $x, y \in V^\perp$, allora anche $x + y \in V^\perp$. Infatti, $x, y \in V^\perp$ significa che
  $v^T x = v^T y = 0, \quad \forall v \in V;$
  cio' implica
  $v^T (x + y) = v^T x + v^T y = 0 + 0 = 0, \quad \forall v \in V,$
  che a sua volta significa che $x + y \in V^\perp$.
- se $x \in V^\perp$, e $r \in \mathbb{R}$, allora anche $xr \in V^\perp$. Infatti, $x \in V^\perp$ significa che
  $v^T x = 0, \quad \forall v \in V;$
  cio' implica
  $v^T (xr) = (v^T x) r = 0r = 0, \quad \forall v \in V,$
  che a sua volta significa che $xr \in V^\perp$.

Possiamo pensare che il sottospazio V sia il sottospazio

$V = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$

generato da un certo insieme di vettori $a_i \in \mathbb{R}^n$.

Dunque V e' costituito dai vettori del tipo

$a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m, \qquad r_i \in \mathbb{R}$

in altri termini,

$$\left[\ a_1 \mid \ldots \mid a_m \ \right] \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}.$$

Il complemento ortogonale $V^\perp$ e' costituito dai vettori $x \in \mathbb{R}^n$ tali che

$v^T x = 0, \qquad \forall v \in V,$

o, equivalentemente, tali che

$$\begin{cases} v^T a_1 = 0 \\ \vdots \\ v^T a_m = 0 \end{cases},$$

e queste condizioni si possono riassumere nell'unica condizione

$$\left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_m^T \end{array}\right] x = 0_m.$$

Ora, indicata con A la matrice ottenuta affiancando le colonne $a_1, \ldots, a_m$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & \ldots & a_m \end{array}\right],$$

ed osservato che

$$\left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_m^T \end{array}\right] = A^T,$$

possiamo rappresentare sinteticamente V nella forma

$$V = \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^m\},$$

e possiamo rappresentare sinteticamente $V^\perp$ nella forma

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n :\ A^T x = 0_m\}.$$

2. **Proiezione ortogonale su un sottospazio**

Sia V un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e sia $V^\perp$ il suo complemento ortogonale. Si puo' dimostrare che ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma

$$b = p + q$$

di un vettore $p \in V$ e di un vettore $q \in V^\perp$. Il vettore p si dice *proiezione ortogonale* di b su V, e il vettore q si dice *proiezione ortogonale* di b su $V^\perp$.

La proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio si puo' determinare nel modo seguente.

Possiamo pensare che il sottospazio V sia il sottospazio

$$V = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$$

generato da un certo insieme di vettori $a_i \in \mathbb{R}^n$ e che questi vettori siano linearmente indipendenti.

Dunque, indicata con A la matrice ottenuta affiancando le colonne $a_1, \ldots, a_m$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & \ldots & a_m \end{array}\right],$$

possiamo rappresentare V nella forma

$$V = \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^m\},$$

e possiamo rappresentare $V^\perp$ nella forma

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n :\ A^T x = 0_m\}.$$

Dato $b \in \mathbb{R}^n$, vogliamo determinare due vettori p, q che soddisfino le condizioni

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= Ar, \qquad r \in \mathbb{R}^m \\ A^T q &= 0_m, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^m$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A^T entrambe i membri si ha

$$A^T b = A^T(Ar + q) = A^T Ar + A^T q = A^T Ar,$$

cioe'

$$A^T A\ r = A^T b.$$

Ora, la matrice quadrata $A^T A$ e' non singolare in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti (vedremo in seguito perche'). Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b,$$

dalla quale si ottiene

$$p = Ar = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

3. Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio $V = \langle u \rangle$ generato da un vettore $u \in \mathbb{R}^n$, diverso da 0_n. Cosi'

$$V = \{ur;\ r \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} r;\ r \in \mathbb{R}\},$$

e

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n :\ u^T x = 0\} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n :\ u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = 0\}.$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$b = p + q$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} r,$$

$$u_1 q_1 + \cdots + u_n q_n = 0,$$

e $r \in \mathbb{R}$ e' lo scalare dato da

$$r = \frac{u^T b}{u^T u} = \frac{\begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}} = \frac{u_1 b_1 + \cdots + u_n b_n}{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

In particolare, per $u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ si ha che

ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$b = p + q$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} r,$$

$$q_1 + \cdots + q_n = 0,$$

e $r \in \mathbb{R}$ e' lo scalare dato da

$$r = \frac{u^T b}{u^T u} = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}.$$

Si noti che $r = \mu_b$, la media delle componenti di b.

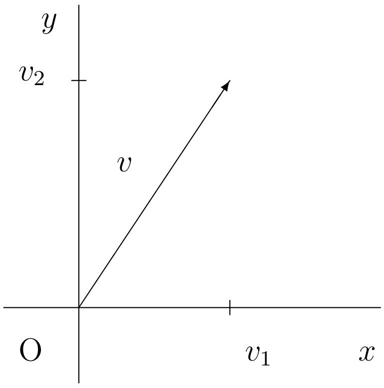
La scomposizione del vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e' dunque

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \mu_b \\ \vdots \\ b_n - \mu_b \end{bmatrix}.$$

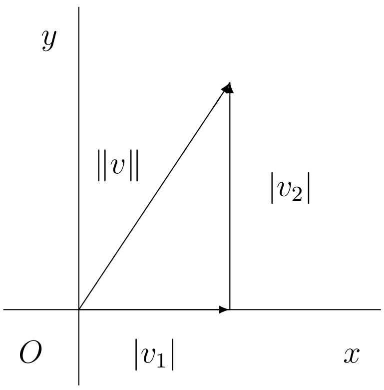
4. **Lunghezza di un vettore, nel piano.**

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Possiamo interpretare un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ come il vettore applicato nel punto origine O avente secondo estremo nel punto di coordinate (v_1, v_2) :



Ora, un punto che partendo da O si sposta di v_1 unita' nella direzione dell'asse x e poi si sposta di v_2 unita' nella direzione dell'asse y descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa.

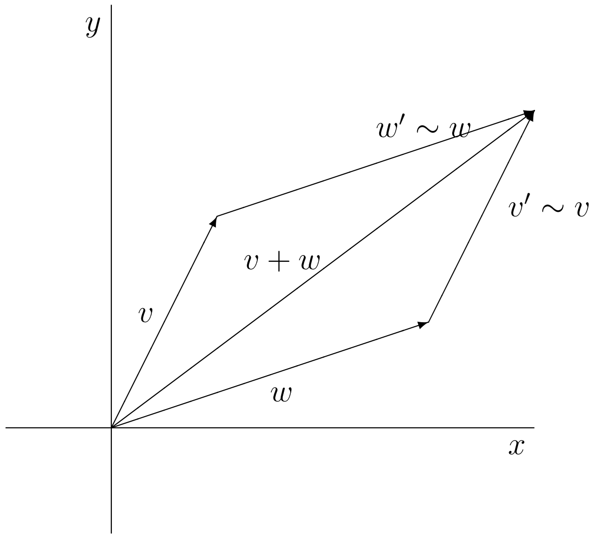


Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

La lunghezza dei vettori e' legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

- Consideriamo due vettori v, w e il vettore $v + w$ loro somma.



Osserviamo che un punto che partendo da O si sposta prima lungo il vettore v e poi si sposta lungo il vettore $w' \sim w$ descrive due lati di un triangolo che ammette il vettore $v + w$ come terzo lato. Ora, la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Si ha cosi' si ha disuguaglianza

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

detta appunto *disuguaglianza triangolare*.

- Consideriamo un vettore v, uno scalre r e il vettore vr multiplo di v secondo r. Allora:

  $$\|vr\| = \|v\||r|,$$

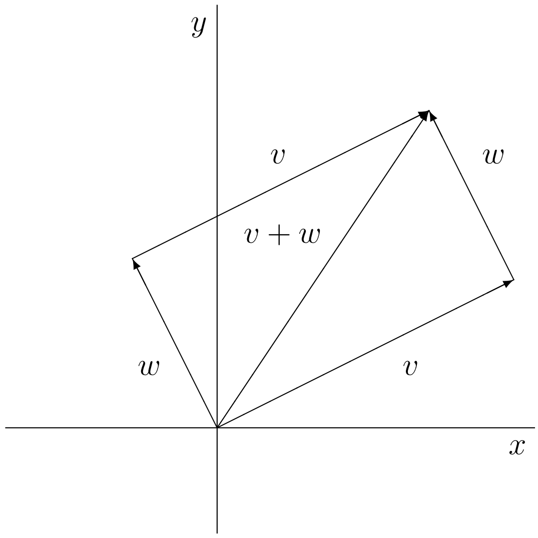
  dove $|r|$ e' il valore assoluto di r.

Utilizzando il prodotto interno, possiamo riscrivere la lunghezza di un vettore a di $\mathbb{R}^2$ nella forma

$$\|a\| = \sqrt{a^T a}.$$

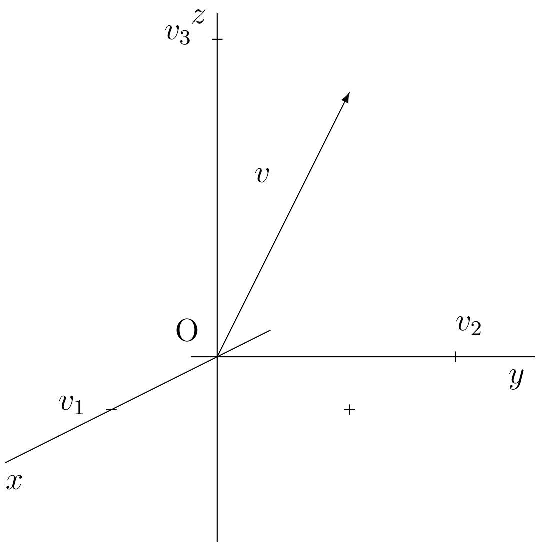
Il teorema di Pitagora puo' essere espresso algebricamente nella forma: se due vettori v e w sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della lunghezza del vettore somma $v+w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi v, w :

$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$

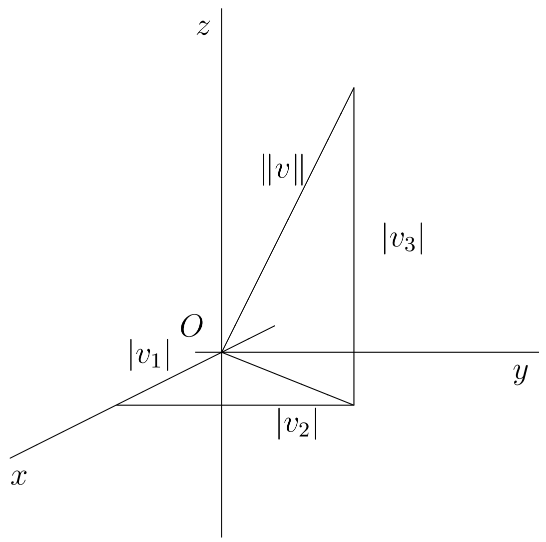


5. **Lunghezza di un vettore, nello spazio**

Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, possiamo interpretare un vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ di $\mathbb{R}^3$ come il vettore applicato nel punto origine O avente secondo estremo nel punto di coordinate $(v_i)_{i=1}^3$:



Ora, un punto che partendo da O si sposta prima nel punto di coordinate $(v_1, v_2, 0)$ e poi si sposta di v_3 unita' nella direzione dell'asse z, descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa.



Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da

$$\|v\| = \sqrt{\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}^2 + |v_3|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Utilizzando il prodotto interno, possiamo riscrivere la lunghezza di un vettore a di $\mathbb{R}^3$ nella forma

$$\|a\| = \sqrt{a^T a}.$$

6. **Norma di un vettore nello spazio $\mathbb{R}^n$.**

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ definiamo la lunghezza $\|v\|$ di un vettore $v = [v_i]_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v^T v}.$$

Solitamente, specialmente nel caso $n > 3$, al termine *lunghezza* si preferisce il termine *norma.*

Le principali proprieta' della norma dei vettori in $\mathbb{R}^n$ sono:

- la norma di un vettore e' nulla se e solo se il vettore e' nullo:
  $\|v\| = 0 \quad$ *se e solo se* $\quad v = 0_n$.
- La norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:
  $$\|vr\| = \|v\||r|, \qquad r \in \mathbb{R}.$$
- La norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:
  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
  Questa disuguaglianza viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano e nello spazio.

Le prime due proprieta' seguono direttamente dalla definizione (le si verifichi per esercizio).

Il prodotto interno di due vettori u, v e' legato alle loro norme dalla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|u^T v| \leq \|u\| \|v\|.$$

Non diamo la dimostrazione di questa disuguaglianza, mostriamo pero' come si possa usare per dimostrare la disuguaglianza triangolare.

Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= (u+v)^T(u+v) \\
&= (u^T+v^T)(u+v) \\
&= u^T u + u^T v + v^T u + v^T v \\
&= \|u\|^2 + 2u^T v + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2|u^T v| + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2,
\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si e' usata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Dunque si ha la disuguaglianza

$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$,

che e' equivalente alla disuguaglianza

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

in quanto sia $\|u+v\|$ che $\|u\| + \|v\|$ sono ≥ 0.

7. **Teorema di Pitagora**

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ vale il teorema di Pitagora: se due vettori a e b sono ortogonali, cioe' se $a^T b = 0 = b^T a$, allora

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\|a+b\|^2 &= (a+b)^T(a+b) \\
&= (a^T+b^T)(a+b) \\
&= a^T a + a^T b + b^T a + b^T b \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2.
\end{aligned}$$

Osservazione

Poiche' gli addendi della scomposizione

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \mu_b \\ \vdots \\ b_n - \mu_b \end{bmatrix}$$

sono fra loro ortogonali, dal teorema di Pitagora si trova che

$$\| \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \|^2 = \| \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix} \|^2 + \| \begin{bmatrix} b_1 - \mu_b \\ \vdots \\ b_n - \mu_b \end{bmatrix} \|^2,$$

cioe'

$$\sum_1^n b_i^2 = n\mu_b^2 + \sum_1^n (b_i - \mu_b)^2.$$