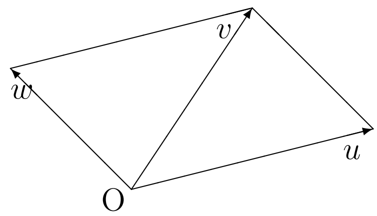
Matematica II, 17.12.08

1. Nel piano sia fissata una unita' di misura. Dati nel piano due vettori u, v applicati in uno stesso punto O, col termine "distanza fra u e v" intendiamo e col simbolo

$$d(u,v)$$

indichiamo la lunghezza, nella unita' di misura scelta, del segmento che unisce



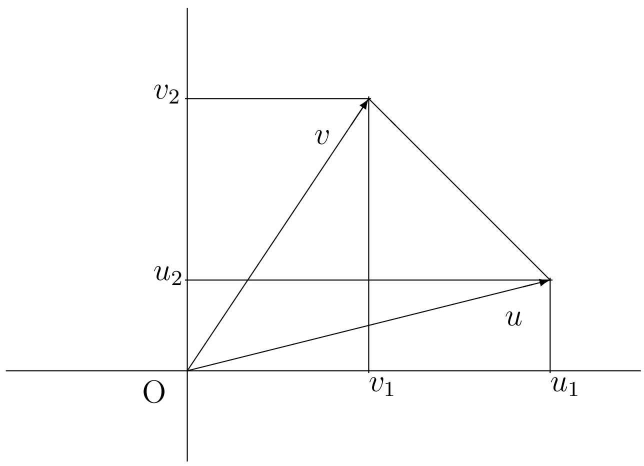
gli estremi finali di u e v.

Osserviamo che tale segmento ha la stessa lunghezza del vettore w tale che $u+w = v$ cioe' del vettore $w = v - u$. Cosi' si ha

$$d(u,v) = \|v - u\|.$$

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, ed identificati i vettori in $\mathbb{R}^2$ con vettori applicati in O, se $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, si ha dunque

$$d(u,v) = \| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{bmatrix} \| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}.$$



Analoghe considerazioni valgono per vettori nello spazio.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, usiamo il termine "distanza fra due vettori u e v" ed usiamo il simbolo $d(u,v)$ per indicare la norma del vettore differenza $v-u$:

   $d(u,v) = \|v-u\|$

   Posto $u=[u_i]_1^n$ e $v=[v_i]_1^n$, si ha dunque

   $d(u,v) = \| \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} v_1-u_1 \\ \vdots \\ v_n-u_n \end{bmatrix} \| = \sqrt{(v_1-u_1)^2+\cdots+(v_n-u_n)^2}.$

   Abbiamo cosi' definito una funzione che associa ad ogni coppia (u,v) di vettori di $\mathbb{R}^n$ un numero reale $d(u,v)$ non negativo. Questa funzione eredita dalla funzione norma molte proprieta', fra le quali le seguenti.

   - $d(u,v) \geq 0$, e vale l'uguale se e solo se $u=v$;
   - $d(u,v) = d(v,u)$;
   - $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$.

   La seconda proprieta' viene detta proprieta' di simmetria, la terza proprieta' viene detta disuguaglianza triangolare.

3. **Soluzioni ai minimi quadrati, primo esempio.**

   Consideriamo il sistema lineare di tre equazioni in una incognita

   $$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \textit{in sintesi}, \qquad ax=b.$$

   Questo sistema e' impossibile.

   Per ogni numero reale $s \in \mathbb{R}$, possiamo considerare la distanza

   $$d(as,b)$$

   fra il vettore $as \in \mathbb{R}^3$ e il vettore $b \in \mathbb{R}^3$. Questa distanza misura quanto s si discosta dall'essere una soluzione, diciamo percio' che essa e' l'*errore associato ad s*.

   Diciamo che un numero reale $r \in \mathbb{R}$ e' una *soluzione ai minimi quadrati* del sistema se e solo se l'errore associato ad r e' minore-uguale all'errore associato a qualsiasi numero reale $s \in \mathbb{R}$:

   $$d(ar,b) \leq d(as,b), \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

   In altri termini, una soluzione ai minimi quadrati del sistema e' un elemento di $\mathbb{R}$ che minimizza la funzione

   $$d(ax,b)$$

   della variabile $x \in \mathbb{R}$.

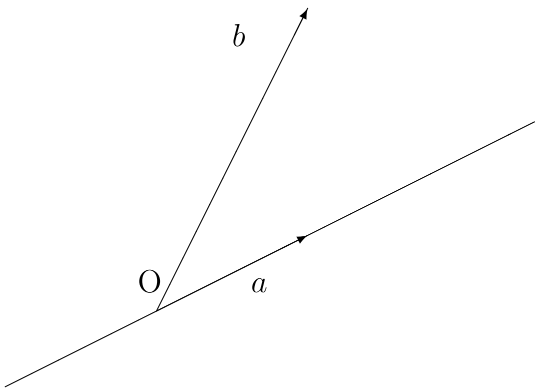
Esplicitando, si ha

$$\begin{aligned} d(ax, b) &= \|b - ax\| \\ &= \| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} x \| \\ &= \| \begin{bmatrix} 1-2x \\ 1-3x \\ 1-4x \end{bmatrix} \| \\ &= \sqrt{(1-2x)^2 + (1-3x)^2 + (1-4x)^2} \end{aligned}$$

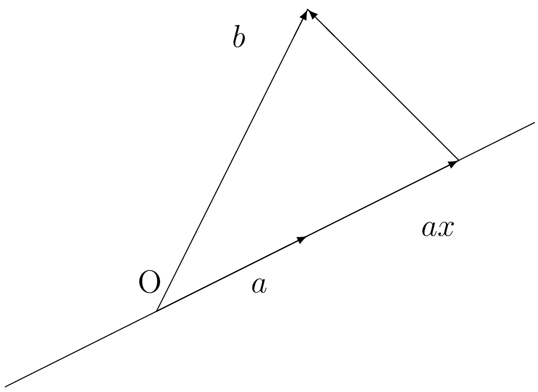
Geometricamente, il sistema

$$ax = b$$

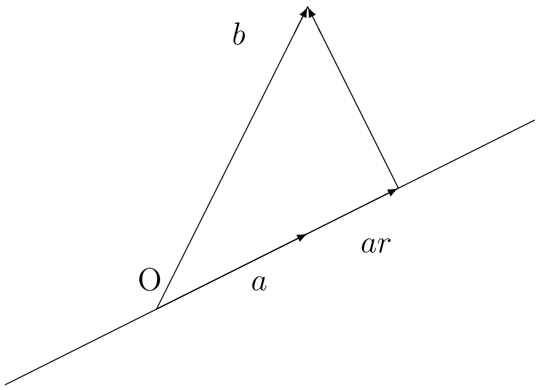
puo' essere letto come la posizione del problema di rappresentare il vettore b come un multiplo scalare del vettore a. Questo problema ha soluzione se e solo se il vettore b sta sulla retta generata da a. In generale ci si aspetta che, come nel nostro esempio, cio' non accada.



Un valore r dell'incognita x e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema se e solo se il punto ar ha, fra i punti della retta generata da a, distanza minima dal punto b.



Ora, il punto ar ha, fra i punti della retta generata da a, distanza minima dal punto b se e solo se il vettore ar e' la proiezione ortogonale del vettore b sulla retta generata da a; l'errore associato ad r e' allora la distanza del vettore b dalla retta.



Dunque si ha che r e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema se e solo se

$$r = \frac{a^T b}{a^T a} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}} = \frac{9}{29},$$

e l'errore corrispondente e' dato da

$$d(ar, b) = \|b - ar\| = \| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \frac{9}{29} \| = \| \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \frac{1}{29} \| = \frac{\sqrt{174}}{29}.$$

4. Sia dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & = & \\ \vdots & = & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Una soluzione esatta del sistema e' un vettore $r \in \mathbb{R}^n$ che sostituito al vettore incognito x rende il primo membro uguale al secondo:

$$Ar = b.$$

Supponiamo che il sistema sia impossibile. Per ogni vettore $s \in \mathbb{R}^n$, possiamo considerare la distanza

$$d(As, b)$$

fra il vettore $As \in \mathbb{R}^m$ e il vettore $b \in \mathbb{R}^m$. Questa distanza misura quanto il vettore s si discosta dall'essere una soluzione, diciamo percio' che essa e' l'*errore associato al vettore* s.

Diciamo che un vettore $r \in \mathbb{R}^n$ e' una *soluzione ai minimi quadrati* del sistema se e solo se l'errore associato ad r e' minore-uguale all'errore associato a un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^n$:

$$d(Ar, b) \leq d(As, b), \qquad \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

In altri termini, una soluzione ai minimi quadrati del sistema e' un vettore di $\mathbb{R}^n$ che minimizza la funzione

$$d(Ax, b)$$

della variabile $x \in \mathbb{R}^n$.

Esplicitando, si ha

$$\begin{aligned}
d(Ax, b) &= \|b - Ax\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} b_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m - \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{bmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{\left(b_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\right)^2 + \cdots + \left(b_m - \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right)^2}
\end{aligned}$$

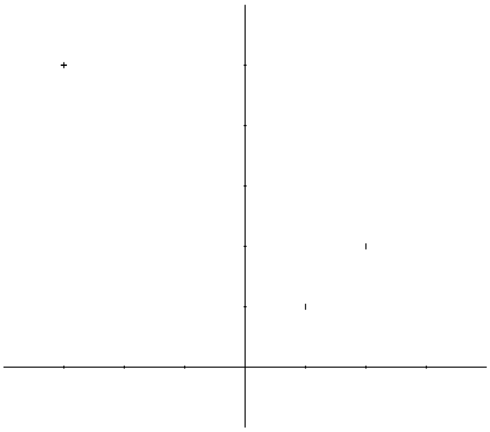
5. **Problema:** Determinare la funzione

$y = mx + q$

che meglio approssima l'insieme dei dati

x	y
1	1
2	2
-3	5

Il problema non ha una soluzione esatta, in quanto il grafico della funzione $y = mx + q$ e' una retta e i punti $(1, 1), (2, 2), (-3, 5)$ non sono allineati.



Imponendo che la retta passi per tutti e tre i punti si ha il sistema lineare

$$\begin{cases} m+q &= 1 \\ 2m+q &= 2 \\ -3m+q &= 5 \end{cases},$$

che e' impossibile.

Possiamo cercare una soluzione ai minimi quadrati di questo sistema, cioe' un vettore di $\mathbb{R}^2$ che minimizza la funzione

$$\sqrt{(1-(m+q))^2 + (2-(2m+q))^2 + (5-(-3m+q))^2}$$

della variabile $\begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

6. **Teorema** *Sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Un vettore $r \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema $Ax = b$ se e solo se r e' una soluzione esatta del sistema lineare*

$$A^T A y = A^T b$$

di n equazioni in n incognite. Questo sistema ha sempre soluzioni e, se le colonne di A sono linearmente indipendenti, allora la matrice $A^T A$ e' invertibile, e ne ha una ed una sola:

$$r = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

7. In base al teorema del punto precedente, si ha che il sistema

$$\begin{cases} m+q &= 1 \\ 2m+q &= 2 \\ -3m+q &= 5 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ha delle soluzioni ai minimi quadrati: esse sono le soluzioni estte del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Svolgendo i conti, si ha

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} m & = & -\frac{5}{7} \\ q & = & \frac{8}{3} \end{matrix} .$$

Cosi' c'e' una ed una sola retta che meglio approssima l'insieme dei tre punti dati: la retta di equazione

$$y = -\frac{5}{7}x + \frac{8}{3}.$$