

Elenco delle conoscenze (in forma di domande) e delle abilità su cui verterà l'esame di Matematica-II modulo. Gli argomenti indicati con [\*] verranno considerati solo al fine del conseguimento della massima votazione.

## **SAPERE:**

### **sistemi lineari, algoritmo di Gauss**

1. cos'è sistema lineare di m equazioni in n incognite?
2. cosa significa che un sistema è determinato, impossibile, indeterminato?
3. fare un esempio di un sistema determinato, di uno impossibile, di uno indeterminato
4. cosa sono due sistemi equivalenti?
5. cos'è la matrice dei coefficienti di un sistema? e la matrice completa?
6. cos'è una matrice a scala per righe?
7. a cosa serve l'algoritmo di Gauss?
8. cosa afferma il teorema sui sistemi lineari con una data matrice quadrata dei coefficienti?

### **algebra delle matrici, autovalori e autovettori**

1. com'è definita la moltiplicazione tra matrici? come devono essere le matrici per poter essere moltiplicate?
2. com'è definita l'addizione tra matrici? come devono essere le matrici per poter essere addizionate?
3. com'è definita la moltiplicazione tra una matrice e uno scalare?
4. come sono definite le potenze di una matrice quadrata?
5. cos'è la trasposta di una matrice?
6. quali sono le proprietà delle operazioni tra matrici?
7. fare un'analogia tra l'algebra dei numeri e l'algebra delle matrici: quali sono le proprietà dei numeri che continuano a valere per le matrici? quali no?
8. cos'è l'inversa di una matrice quadrata?
9. come può essere espressa la soluzione di un sistema lineare in termini dell'inversa della matrice dei coefficienti? quali sono le ipotesi del teorema? come si dimostra?
10. se tutti i sistemi lineari aventi una data matrice quadrata dei coefficienti sono determinati, si può dire che la matrice è invertibile?
11. cosa sono gli autovalori e gli autovettori di una matrice quadrata?
12. come si possono ricondurre le potenze di una matrice quadrata alle potenze di una matrice diagonale? sotto quali condizioni ciò è possibile?

### **determinante, autovalori**

1. cos'è il determinante di una matrice quadrata?
2. quali sono le proprietà del determinante di ordine n?
3. quali sono i metodi per calcolare il determinante di una matrice?

4. scrivere la regola di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare quadrato di ordine  $n$ ; nel caso  $n = 2$ , ricavare la regola usando le proprietà del determinante
5. cos'è il polinomio caratteristico di una matrice quadrata?
6. perché gli autovalori di una matrice quadrata sono le radici del polinomio caratteristico della matrice?

### spazio vettoriale $R^n$ , sottospazi

1. che cos'è lo spazio vettoriale  $R^n$ ?
2. come si possono interpretare geometricamente le operazioni (addizione, moltiplicazione per scalari) tra vettori di  $R^2$ ? e tra vettori di  $R^3$ ?
3. usando le operazioni sui vettori di  $R^3$ , come si possono rappresentare le rette e i piani nello spazio?
4. qual è la base canonica di  $R^n$ ? cos'è una base di  $R^n$ ?
5. cosa afferma il teorema sulle basi di  $R^n$ ?
6. [\*] cos'è il sottospazio generato da un insieme di vettori di  $R^n$ ? cos'è un sottospazio di  $R^n$ ?
7. [\*] cos'è una base di un sottospazio di  $R^n$ ? qual è un criterio per sapere se un insieme di vettori è una base del sottospazio da esso generato? cos'è un insieme linearmente indipendente di vettori?

### ortogonalità, norma, proiezioni ortogonali

1. cos'è il prodotto interno di due vettori di  $R^n$ ? quali proprietà possiede?
2. cos'è la norma di un vettore di  $R^n$ ? che significato ha per  $n \leq 3$ ? quali proprietà possiede?
3. scrivi e dimostra il teorema di Pitagora in  $R^n$
4. cosa significa per definizione che due vettori di  $R^n$  sono ortogonali?
5. dati in  $R^2$  un vettore  $b$  e una retta  $l$ , come si definisce la proiezione ortogonale di  $b$  su  $l$ ? qual è la formula per trovare la proiezione ortogonale di  $b$  su  $l$ ? come si ricava?
6. dati in  $R^3$  un vettore  $b$  e un piano  $\alpha$ , come si definisce la proiezione ortogonale di  $b$  su  $\alpha$ ? qual è la formula per trovare la proiezione ortogonale di  $b$  su  $\alpha$ ? come si ricava?
7. [\*] che cos'è il complemento ortogonale di un sottospazio di  $R^n$ ? perché è un sottospazio?
8. [\*] dato un vettore  $b$  e un sottospazio  $V$  di  $R^n$ , come si definisce la proiezione ortogonale di  $b$  su  $V$ ? qual è la formula per trovare la proiezione ortogonale di  $b$  su  $V$ ? come si ricava?

### distanza, soluzioni ai minimi quadrati

1. come si definisce la distanza tra due vettori di  $R^n$ ? quali sono le sue proprietà?
2. cos'è una soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare? perché si chiama soluzione ai minimi quadrati?
3. come si possono trovare le soluzioni ai minimi quadrati di un sistema lineare?
4. [\*] sotto quali condizioni un sistema ha un'unica soluzione ai minimi quadrati?

### su più argomenti

1. quali sono i metodi per calcolare l'inversa di una matrice quadrata?
2. quali sono i metodi per risolvere un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è quadrata?
3. quali sono i metodi per risolvere un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti non è quadrata?
4. cos'è una matrice non singolare?

## SAPER FARE:

1. dato un sistema lineare, scrivere la matrice completa del sistema, e viceversa
2. utilizzare l'algoritmo di Gauss, per trasformare una matrice in una matrice a scala per righe
3. dato un sistema lineare, utilizzare l'algoritmo di Gauss per stabilire se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato; determinare l'insieme delle soluzioni
4. moltiplicare due matrici; aggiungere due matrici; moltiplicare una matrice per uno scalare
5. verificare la consistenza di una espressione matriciale
6. dato un sistema lineare, scrivere il sistema in forma matriciale e viceversa
7. trovare l'inversa di una matrice utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan
8. dato un sistema lineare con matrice dei coefficienti invertibile, risolvere il sistema calcolando l'inversa della matrice
9. data una matrice quadrata, calcolare il suo determinante usando la definizione ricorsiva
10. data una matrice quadrata, calcolare il suo determinante usando l'algoritmo di Gauss
11. trovare l'inversa di una matrice utilizzando i complementi algebrici
12. risolvere un dato sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite con il metodo di Cramer
13. data una matrice quadrata, determinare i suoi autovalori e gli autovettori corrispondenti
14. usare autovettori ed autovalori di una matrice quadrata per dare una formula per le sue potenze
15. dati i vettori  $a, b$  di  $R^n$  e lo scalare  $r$  determinare:  $a + b$ ,  $ar$ , il prodotto interno di  $a$  e  $b$ , la norma di  $a$ , la distanza fra  $a$  e  $b$
16. dati i vettori  $a_1, \dots, a_p$  di  $R^n$  e gli scalari  $r_1, \dots, r_p$ , determinare la corrispondente combinazione lineare
17. dato un insieme di vettori di  $R^n$ , stabilire se esso è o no una base di  $R^n$
18. dati nel piano un vettore  $b$  e la retta  $l$  generata da un dato vettore non nullo  $a$ , trovare il vettore proiezione ortogonale di  $b$  su  $l$
19. dati nello spazio un vettore  $b$  e il piano  $\alpha$  generato da due dati vettori non proporzionali  $a_1, a_2$ , trovare il vettore proiezione ortogonale di  $b$  su  $\alpha$
20. [\*] dati in  $R^n$  un vettore  $b$  e il sottospazio  $V$  generato da dati vettori  $a_1, \dots, a_p$ , trovare il vettore proiezione ortogonale di  $b$  su  $V$
21. dato un sistema lineare  $Ax = b$  di  $m$  equazioni in  $n$  incognite, trovare le soluzioni ai minimi quadrati del sistema