

Conoscenze (in forma di domande) su cui vertera' l'esame di Matematica-II modulo.

### **Sistemi lineari.**

1. Cos'e' una equazione lineare in  $n$  incognite? Cos'e' una soluzione di una tale equazione? Quale interpretazione geometrica ha l'insieme delle soluzioni per  $n = 2$ ? E per  $n = 3$ ?
2. Cosa significa che un sistema di equazioni lineari e' determinato, indeterminato, impossibile? Dare un esempio di un sistema lineare determinato, di uno indeterminato, e di uno impossibile. Cosa sono due sistemi lineari equivalenti?
3. Cos'e' la matrice di un sistema lineare? Cos'e' la matrice dei coefficienti del sistema?
4. Cos'e' una matrice a scala per righe? Cos'e' l'algoritmo di Gauss?
5. Come si puo' usare l'algoritmo di Gauss per risolvere un sistema lineare?
6. Cos'e' un sistema lineare omogeneo? Cosa si puo' dire di un sistema lineare omogeneo di  $m$  equazioni in  $n > m$  incognite?
7. Cos'e' una matrice triangolare superiore? Cos'e' una matrice triangolare superiore non degenera? Cosa si puo' dire dei sistemi lineari che hanno una data matrice quadrata dei coefficienti?

### **Algebra delle matrici.**

1. Com'e' definita la moltiplicazione tra matrici? Come devono essere le matrici per poter essere moltiplicate?
2. Com'e' definita l'addizione tra matrici? Come devono essere le matrici per poter essere addizionate?
3. Com'e' definita la moltiplicazione tra una matrice e uno scalare?
4. Cos'e' la trasposta di una matrice?
5. Quali sono le proprieta' dell'algebra dei numeri reali che continuano a valere per l'algebra delle matrici? Quali no?
6. Come si puo' rappresentare sinteticamente un'equazione lineare in  $n$  incognite? E un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite?
7. Cos'e' l'inversa di una matrice quadrata?
8. Cosa si puo' dire dei sistemi lineari con una matrice dei coefficienti quadrata invertibile? Motivare la risposta.

9. Cosa si puo' dire di una matrice quadrata  $A$  tale che tutti i sistemi lineari con matrice dei coefficienti  $A$  sono determinati?
10. Cos'e' una matrice a scala ridotta per righe? Cos'e' l'algoritmo di Gauss-Jordan? Come si puo' usare l'algoritmo di Gauss-Jordan per calcolare l'inversa di una matrice?
11. Come sono definite le potenze di una matrice quadrata?
12. Quali proprieta' posseggono le matrici diagonali, rispetto alla moltiplicazione?
13. Cosa sono gli autovettori e gli autovalori di una matrice quadrata?
14. Come si possono ricondurre le potenze di una matrice quadrata alle potenze di una matrice diagonale? Sotto quali condizioni cio' e' possibile?

### **Determinanti.**

1. Cos'e' il determinante di una matrice quadrata di ordine 2? Quali sono le proprieta' del determinante di ordine 2? Scrivere la regola di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare quadrato di ordine 2; ricavare la regola usando le proprieta' del determinante.
2. Cos'e' il determinante di una matrice quadrata di ordine  $n$ ?
3. Quali sono le proprieta' del determinante di ordine  $n$ ?
4. Scrivere la regola di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare quadrato di ordine  $n$ .
5. Come si puo' usare l'algoritmo di Gauss per calcolare il determinante di una matrice numerica?
6. Cos'e' una matrice non singolare?
7. Cos'e' il polinomio caratteristico di una matrice quadrata?
8. Perche' gli autovalori di una matrice quadrata sono le radici del polinomio caratteristico della matrice?

### **Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ .**

1. Cos'e' lo spazio vettoriale geometrico con origine in un punto  $O$ ? Quali sono i suoi sottospazi?
2. Cos'e' lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ ?
3. Come si possono rappresentare geometricamente le operazioni (addizione, moltiplicazione per scalari) tra vettori di  $\mathbb{R}^2$ ? E tra vettori di  $\mathbb{R}^3$ ?
4. Cos'e' una combinazione lineare di vettori? Che relazione c'e' fra combinazioni lineari e sistemi lineari?

5. Cos'è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ ? Cos'è lo spazio generato da un insieme di vettori di  $\mathbb{R}^n$ ?
6. Cosa significa che un insieme di vettori è linearmente dipendente? e che è linearmente indipendente?
7. Che relazione c'è fra la dipendenza/indipendenza lineare di un insieme di vettori e le loro combinazioni lineari che risultano nel vettore nullo?
8. Cos'è la dimensione di un sottospazio?
9. Quanto vale la dimensione di  $\mathbb{R}^n$ ? Perché?
10. Quanto vale la dimensione dello spazio generato da un insieme di vettori linearmente indipendenti?
11. Cos'è una base di un sottospazio? Cos'è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ?
12. Quanto vale la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee linearmente indipendenti?

### Spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ .

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto  $O$ , consideriamo i vettori con origine in  $O$ . Quale relazione fra le coordinate di due vettori caratterizza la loro ortogonalità? Cos'è la proiezione ortogonale di un vettore su una retta per  $O$ ? Come si ricava una formula per questa proiezione ortogonale?
2. Cos'è il prodotto interno di due vettori di  $\mathbb{R}^n$ ? Quali proprietà possiede? Cos'è il coefficiente di Fourier di un vettore rispetto ad un vettore non nullo?
3. Come viene definita la relazione di ortogonalità tra due vettori di  $\mathbb{R}^n$ ? Cos'è il complemento ortogonale di un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ ?
4. Come si possono rappresentare sinteticamente il sottospazio generato da un insieme di vettori e il suo complemento ortogonale?
5. Cos'è la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio? Come si ricava la formula per questa proiezione ortogonale?
6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto  $O$ , consideriamo i vettori con origine in  $O$ . Come si esprime la lunghezza di un vettore in funzione delle sue coordinate?
7. Come è definita la norma di un vettore di  $\mathbb{R}^n$ ? Quali proprietà possiede?
8. Cosa afferma la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?
9. Come si esprime il teorema di Pitagora in  $\mathbb{R}^n$ ? Come si prova?
10. Cos'è una soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare?

11. Cosa afferma il teorema sulle soluzioni ai minimi quadrati di un sistema lineare?
12. Come si definisce la distanza fra due vettori di  $\mathbb{R}^n$ ?
13. Dati in  $\mathbb{R}^n$  un sottospazio  $V$  e un vettore  $b$ , quale proprieta' caratterizza il vettore proiezione ortogonale di  $b$  su  $V$  fra tutti i vettori di  $V$ ?