

Matematica II - Argomenti svolti

- **Sistemi lineari.**

Sistemi lineari in una, due, tre incognite; risoluzione per sostituzione; descrizione dell'insieme delle soluzioni in funzione di parametri liberi; interpretazione geometrica come intersezione di rette nel piano e di piani nello spazio.

Sistemi lineari di m equazioni in n incognite; sistema determinato, indeterminato, impossibile, sistemi equivalenti; matrice associata a un sistema, matrice dei coefficienti. Matrice a scala per righe, algoritmo di Gauss, e sua applicazione alla risoluzione dei sistemi lineari.

Sistemi lineari omogenei; proposizione sui sistemi lineari omogenei di m equazioni in $n > m$ incognite. Matrice triangolare, triangolare non degenera; proposizione sui sistemi lineari aventi una data matrice quadrata dei coefficienti.

- **Algebra delle matrici.**

Notazioni per n -ple ordinate, colonne, righe di numeri reali; moltiplicazione di una riga per una colonna; rappresentazione $a'x = b$ di una equazione lineare. Notazioni per matrici di numeri reali; moltiplicazione di matrici; rappresentazione $Ax = b$ di un sistema lineare. Proprietà associativa della moltiplicazione di matrici, non validità della proprietà commutativa; matrici unita'.

Matrice inversa di una matrice quadrata, unicità e proprietà'. Teorema: se una matrice quadrata A è invertibile, allora ciascun sistema $Ax = b$ è determinato, con soluzione $x = A^{-1}b$. Teorema: se A è una matrice quadrata e ciascun sistema $Ax = b$ è determinato, allora A è invertibile. Matrici a scala ridotta per righe, algoritmo di Gauss-Jordan. Uso dell'algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa.

Potenze di una matrice quadrata, proprietà'. Matrici diagonali, moltiplicazione per una matrice diagonale, potenze di una matrice diagonale. Autovettori e autovalori di una matrice quadrata. Uso di autovettori ed autovalori di una matrice quadrata A per il calcolo delle potenze di A .

Addizione di matrici, moltiplicazione di una matrice per un numero reale, e loro proprietà'. Trasposizione di matrici e sue proprietà'.

- **Determinanti.**

Determinante di una matrice quadrata di ordine uno, due e tre. Determinante di una matrice quadrata di ordine n , definizione ricorsiva mediante sviluppi di Laplace per colonne o righe, formula esplicita. Proprietà'; regola di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare quadrato. Applicazione alla determinazione di un polinomio con date valutazioni. Algoritmo di Gauss per il calcolo dei determinanti.

Definizione di matrice non singolare.

Caratterizzazione degli autovalori di una matrice come radici del suo polinomio caratteristico.

- **Spazio vettoriale \mathbb{R}^n .**

Spazio vettoriale geometrico con origine in un punto O , addizione di vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, combinazioni lineari; sottospazi; dipendenza/indipendenza lineare di vettori; dimensione di un sottospazio.

Interpretazione geometrica delle operazioni su \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Spazio vettoriale \mathbb{R}^n , addizione di due vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, combinazioni lineari; combinazioni lineari di m vettori che risultano in un vettore dato e soluzioni di un sistema lineare di n equazioni in m incognite. Sottospazio; sottospazio generato da un insieme di vettori. Dipendenza/indipendenza lineare; caratterizzazione della dipendenza/indipendenza lineare. Dimensione di un sottospazio. Proposizione sulla dimensione di \mathbb{R}^n . Dimensione dello spazio generato da un insieme di vettori linearmente indipendenti. Base di un sottospazio, base canonica di \mathbb{R}^n .

Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee indipendenti.

- **Spazio euclideo \mathbb{R}^n .**

Ortogonalita' nel piano. Proiezione ortogonale di un vettore su una retta, e relativa formula. Ortogonalita' nello spazio. Proiezione ortogonale di un vettore su un piano, e relativa formula.

Prodotto interno di due vettori nello spazio \mathbb{R}^n , proprieta'. Coefficiente di Fourier di un vettore rispetto a un vettore, e di una matrice rispetto a una matrice. Ortogonalita' di due vettori. Complemento ortogonale di un sottospazio; rappresentazione sintetica dello spazio generato da un insieme di vettori e del suo complemento ortogonale. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio, e relativa formula. Caso dei sottospazi di dimensione 1 e 2.

Lunghezza di un vettore nel piano e nello spazio. Norma di un vettore di \mathbb{R}^n , proprieta', disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Teorema di Pitagora.

Soluzioni ai minimi quadrati di un sistema lineare. Teorema sull'esistenza ed eventuale unicita' delle soluzioni ai minimi quadrati. Applicazione al problema dell'interpolazione.

Distanza fra due vettori di \mathbb{R}^n . Distanza e proiezioni ortogonali. Distanza, proiezioni ortogonali e minimi quadrati.