

## Matematica II 24.11.09

### Matrice inversa

1. Per  $n = 1$ , l'insieme  $\mathbb{R}^{n \times n}$  delle matrici quadrate di ordine  $n$  diventa l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali.

In  $\mathbb{R}$ , il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale e' uguale a quell'altro numero reale:

$$1 a = a = a 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

L'inverso  $a^{-1}$  di un numero reale non nullo  $a$  e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto del numero reale per il suo inverso e' uguale a 1:

$$a a^{-1} = 1 = a^{-1} a.$$

Un'equazione lineare

$$ax = b$$

nell'incognita reale  $x$  e' determinata se e solo se  $a \neq 0$ , e in tal caso l'unica soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri per  $a^{-1}$ :

$$a^{-1}ax = a^{-1}b; \quad 1x = a^{-1}b; \quad x = a^{-1}b.$$

In questa lezione vedremo come queste nozioni e questi fatti si estendono al caso delle matrici quadrate di un qualsiasi ordine  $n \geq 1$ .

### 2. Matrice inversa

**Definizione** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Una matrice  $B$  quadrata di ordine  $n$  si dice matrice inversa di  $A$  se sia moltiplicando  $A$  per  $B$  a destra che moltiplicando  $A$  per  $B$  a sinistra si ottiene la matrice  $I_n$  unita' di ordine  $n$ :

$$AB = I_n = BA.$$

In tal caso, si dice che  $A$  e' invertibile.

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Se una matrice  $B$  quadrata di ordine  $n$  si comporta da inversa sulla sinistra di  $A$  e se una matrice  $C$  quadrata di ordine  $n$  si comporta da inversa sulla destra di  $A$ , allora queste due matrici coincidono; infatti

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

Dunque se  $A$  possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta la matrice inversa di  $A$ , e viene denotata con

$$A^{-1}.$$

Nella discussione dei seguenti esempi si adotta un approccio ingenuo. Vedremo in seguito un metodo efficiente per decidere se una matrice e' invertibile o meno e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

**Esempio.** Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioè

$$\begin{bmatrix} p+r & q+s \\ -p+r & -q+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} p+r=1 \\ q+s=0 \\ -p+r=0 \\ -q+s=1 \end{cases}.$$

Questo sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite in realtà consiste di due sistemi di due equazioni in due incognite ciascuno. Dalle prima e terza equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite  $p, r$  :

$$p = 0.5,$$

$$r = 0.5;$$

dalla seconda e dalla quarta equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite  $q, s$  :

$$q = -0.5,$$

$$s = 0.5;$$

Dunque c'è una ed una sola matrice inversa destra di  $A$ , ed è

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che  $B$  è anche inversa sinistra di  $A$ , dunque è l'inversa di  $A$  :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

**Esempio.** Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + 2r = 1 \\ q + 2s = 0 \\ 3p + 6r = 0 \\ 3q + 6s = 1 \end{cases}.$$

Ora, la prima e la terza equazione di questo sistema sono incompatibili. Dunque  $A$  non possiede alcuna inversa destra, e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

Concludiamo questo paragrafo osservando due proprietà: se una matrice  $A$  è invertibile, anche la sua inversa  $A^{-1}$  è invertibile, e si ha

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

se  $A$  e  $B$  sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche il loro prodotto  $AB$  è invertibile, e l'inversa di  $AB$  è il prodotto delle inverse, nell'ordine opposto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Verifichiamo questa seconda proprietà:

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1}AB &= B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n, \\ ABB^{-1}A^{-1} &= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

### 3. Da matrici invertibili verso sistemi determinati.

**Teorema 1.** *Se una matrice  $A$  quadrata di ordine  $n$  possiede inversa, allora ciascun sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite*

$$Ax = b$$

*con matrice dei coefficienti  $A$  è determinato; inoltre, la sua unica soluzione è data da*

$$x = A^{-1}b.$$

**Dimostrazione.** Dal fatto che  $A^{-1}$  è inversa sinistra di  $A$ , ricaviamo

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \\ (A^{-1}A)x &= A^{-1}b \\ I_n x &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Usando il fatto che  $A^{-1}$  e' inversa destra di  $A$ , mostriamo che questa e' davvero una soluzione:

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_nb = b.$$

**cvd**

#### 4. Da sistemi determinati verso matrici invertibili

**Teorema 2.** *Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Se tutti i sistemi lineari*

$$Ax = b$$

*aventi matrice dei coefficienti  $A$  sono determinati, allora  $A$  e' invertibile.*

**Dimostrazione (parziale).** Proviamo soltanto che  $A$  possiede un'inversa destra. Indicate con

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

le colonne della matrice unita'  $I_n$ , consideriamo i sistemi lineari

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots \quad Ax_n = e_n,$$

dove ciascun  $x_i$  e' una colonna di  $n$  incognite. Ora, per ipotesi tutti questi sistemi lineari sono determinati; siano

$$s_1, \quad s_2, \quad \dots \quad s_n.$$

le rispettive soluzioni. Si hanno cosi' le  $n$  uguaglianze

$$As_1 = e_1, \quad As_2 = e_2, \quad \dots \quad As_n = e_n,$$

che possono essere riassunte nell'unica uguaglianza

$$[As_1 \ As_2 \ \dots \ As_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n],$$

che si puo' scrivere nella forma

$$A[s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] = I_n.$$

Dunque la matrice

$$S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$$

e' un'inversa destra di  $A$ .

**cvd**

#### 5. Algoritmo di Gauss, sistemi determinati, e matrici invertibili

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Consideriamo le seguenti affermazioni:

- (a) l'algoritmo di Gauss trasforma  $A$  in una matrice triangolare superiore non degenera;

- (b) tutti i sistemi aventi matrice dei coefficienti  $A$  sono determinati;
- (c)  $A$  e' invertibile.

Dalle proposizioni generali sui sistemi lineari segue che le prime due affermazioni sono equivalenti; dal punto precedente segue che ultime due affermazioni sono equivalenti; dunque le tre affermazioni sono equivalenti. In particolare abbiamo che

*Una matrice  $A$  e' invertibile se e solo se l'algoritmo di Gauss trasforma  $A$  in una matrice triangolare superiore non degenera.*

6. Sappiamo che un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite

$$Ax = b,$$

per esteso

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

puo' essere risolto considerando la matrice

$$[A|b]$$

ottenuta affiancando la matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti, cioe'

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right],$$

ed applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss.

Piu' in generale, un'equazione matriciale

$$AX = B,$$

per esteso

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & \dots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & \dots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

puo' essere risolta considerando la matrice

$$[A|B]$$

ottenuta affiancando la matrice coefficiente e la matrice termini noto, cioe'

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & \dots & b_{mp} \end{array} \right],$$

ed applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss.

In realta' ci serviremo di un raffinamento di questo algoritmo.

### 7. Algoritmo di Gauss-Jordan.

Una matrice a scala per righe che soddisfi le ulteriori codizioni

*ciascun pivot e' uguale a 1,*

*ciascun pivot e' l'unico elemento non nullo della sua colonna*

si dice matrice *a scala ridotta per righe*.

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici a scala ridotta per righe con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In ciascuna di queste matrici, il simbolo \* indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

L'algoritmo di Gauss-Jordan prende in entrata una qualsiasi matrice di  $m$  righe ed  $n$  colonne e restituisce in uscita una matrice a scala ridotta per righe con  $m$  righe ed  $n$  colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le *operazioni elementari per righe*:

- sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
- scambiare due righe;
- moltiplicare una riga per un numero reale non nullo.

Diamo di seguito una descrizione informale dell'algoritmo.

Usando le prime due operazioni elementari si trasforma la matrice data in una matrice a scala per righe. Osserviamo che tutti gli elementi al di sotto di un pivot sono nulli. Usando la prima operazione elementare si annullano anche tutti gli elementi al di sopra di un pivot. Usando la terza operazione elementare si rendono tutti i pivot uguali a 1.

### 8. Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa.

L'algoritmo di Gauss-Jordan puo' essere usato per calcolare in modo efficiente l'inversa di una matrice.

**Teorema** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , e si consideri la matrice

$$[A|I_n]$$

ottenuta affiancando ad  $A$  la matrice  $I_n$  unita' di ordine  $n$ . Se, applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss-Jordan si ottiene una matrice della forma

$$[I_n|B],$$

allora  $A$  e' invertibile e

$$A^{-1} = B.$$

Altrimenti,  $A$  non e' invertibile.

**Illustrazione** Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Affiancando ad  $A$  la matrice unita'  $I_3$  otteniamo:

$$[A | I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Applicando operazioni elementari per righe possiamo ottenere la matrice a scala per righe

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

Applicando altre operazioni elementari per righe otterremo la matrice a scala ridotta per righe

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] = [ I_3 \mid B ] .$$

Dunque  $A$  e' invertibile e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

## 9. Potenze

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Per ogni intero realtivo  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , la potenza  $p$ -ma della matrice  $A$  e' definita da

$$\begin{aligned} A A \cdots A \quad (p \text{ volte}) & \quad \text{per } p > 0 \\ A^p = I_n & \quad \text{per } p = 0 ; \\ A^{-1} A^{-1} \cdots A^{-1} \quad (-p \text{ volte}) & \quad \text{per } p < 0 \end{aligned}$$

le potenze con esponente negativo sono dunque definite solo per matrici invertibili.

**Esempio:**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Valgono le usuali proprieta' delle potenze:

$$A^p A^q = A^{p+q};$$

$$(A^p)^q = A^{pq};$$

la proprieta'

$$(AB)^p = A^p B^p$$

vale sotto al condizione che  $A$  e  $B$  siano permutabili, cioe'  $AB = BA$ .