# Matematica II 13.11.09

## Sistemi lineari in al piu' tre incognite

1. Un'equazione lineare in una incognita reale $x$ e' un'equazione della forma

$$ax = b,$$

con $a, b$ costanti reali. Se $a \neq 0$, allora l'equazione ha una ed una sola soluzione, data da

$$x = \frac{b}{a};$$

l'equazione e' determinata. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione non ha soluzioni, e' impossibile. Se $a = b = 0$, l'equazione ha infinite soluzioni, e' indeterminata.

2. Siano $x, y$ due incognite reali. Un esempio di equazione lineare in $x, y$ e'

$$5x + 2y = 7.$$

Un esempio di una soluzione di questa equazione e' dato dai valori $x = 1$ e $y = 1$ delle incognite, in altri termini dalla coppia ordinata $(1, 1)$.

Possiamo determinare tutte le soluzioni dell'equazione ricavando un'incognita

$$y = -2.5x + 3.5$$

in funzione dell'altra e ponendo quest'ultima uguale a un parametro libero. Le soluzioni dell'equazione sono date dai valori

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2.5t + 3.5 \end{cases}$$

ottenuti al variare del parametro $t$ fra i numeri reali. In altri termini, le soluzioni sono date dalle coppie ordinate

$$(t,\ -2.5t + 3.5), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Fissate nel piano una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita $x$, e una retta ad essa ortogonale sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita $y$, possiamo identificare ogni coppia ordinata di numeri reali con un punto del piano.

Al variare del parametro $t$ in $\mathbb{R}$, i punti $(t,\ -2.5t + 3.5)$ descrivono una retta nel piano. Assegnando al parametro i valori $t = 0$ e $t = 1$ otteniamo i punti $(0, 3.5)$ e $(1, 1)$; la retta congiungente questi due punti rappresenta l'insieme delle soluzioni dell'equazione data.

3. Le equazioni lineari nelle incognite $x, y$ sono le equazioni della forma

$$ax + by = c,$$

dove $a, b, c$ sono costanti reali; $a$ e $b$ sono detti i coefficienti e $c$ il termine noto del'equazione.

Se $(a, b) \neq (0, 0)$, allora l'equazione ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro reale; l'insieme delle soluzioni e' una retta nel piano. Se $(a, b) = (0, 0)$ e $c \neq 0$, allora l'equazione non ha soluzioni. Se $(a, b) = (0, 0)$ e $c = 0$, allora l'equazione ha per soluzioni tutte le coppie ordinate di numeri reali; l'insieme delle soluzioni e' l'intero piano.

4. Un esempio di sistema di due equazioni lineari in $x, y$ e'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ 4x + 5y & = & 6 \end{array} \right. .$$

L'insieme delle soluzioni della prima equazione e' una retta $r_1$, l'insieme delle soluzioni della seconda equazione e' una retta $r_2$, e l'insieme delle soluzioni del sistema e' costituito dai punti comuni a $r_1$ e $r_2$.

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di sostituzione:

- dalla prima equazione ricaviamo l'incognita $x$ in funzione dell'incognita $y$, e sostituiamo nella seconda equazione

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y + 3 \\ 4(-2y + 3) + 5y & = & 6 \end{array} \right. ,$$

cosi' che nella seconda equazione compaia solo la $y$, e si ha

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y + 3 \\ -3y & = & -6 \end{array} \right. ;$$

- ricaviamo il valore della $y$ dalla seconda equazione e sostituiamo nella prima, ottenendo cosi' anche il valore dalla $x$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2 \cdot 2 + 3 = -1 \\ y & = & 2 \end{array} \right. .$$

Il sistema ha una ed una sola soluzione:

$$(-1, 2).$$

Le rette $r_1$ e $r_2$ sono incidenti nel punto $(-1, 2)$.

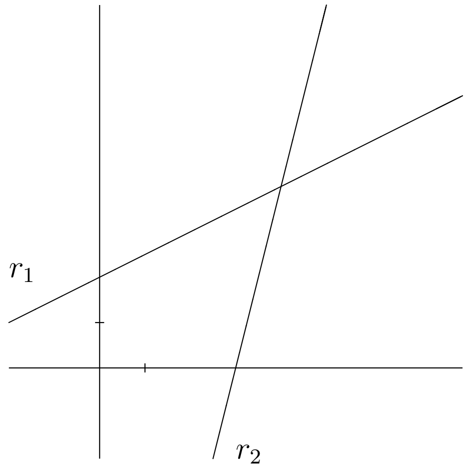
5. Il generico sistema di due equazioni lineari in $x, y$ e'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y & = & c_1 \\ a_2x + b_2y & = & c_2 \end{array} \right. ,$$

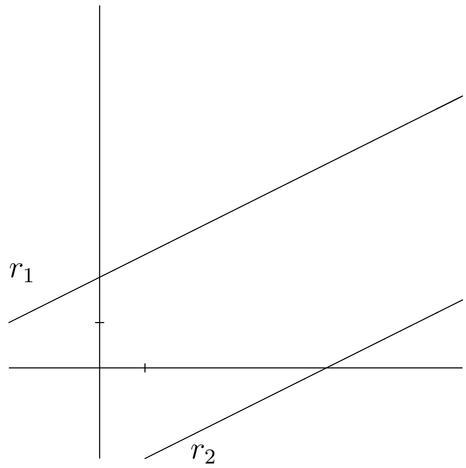
dove $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sono costanti reali.

Supponiamo che $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ e $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$, cosi' che alle due equazioni corrispondano due rette $r_1$ e $r_2$. Allora si hanno i tre casi:

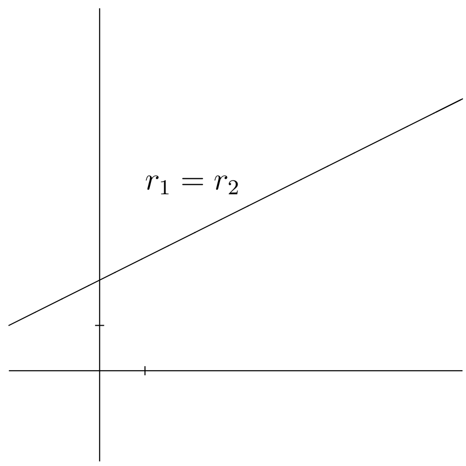
- se le due coppie $(a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2)$ non sono proporzionali, allora il sistema e' determinato, con una certa soluzione $(x_0, y_0)$. Le due rette $r_1$ ed $r_2$ sono incidenti nel punto $(x_0, y_0)$.




- se le due coppie $(a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2)$ sono proporzionali e le due terne $(a_1, b_1, c_1)$ e $(a_2, b_2, c_2)$ non sono proporzionali, allora le due equazioni sono incompatibili, e il sistema e' impossibile. Le due rette $r_1$ ed $r_2$ sono parallele e distinte.




- se le due terne $(a_1, b_1, c_1)$ e $(a_2, b_2, c_2)$ sono proporzionali, allora le due equazioni sono equivalenti. Le due rette $r_1$ ed $r_2$ sono coincidenti.



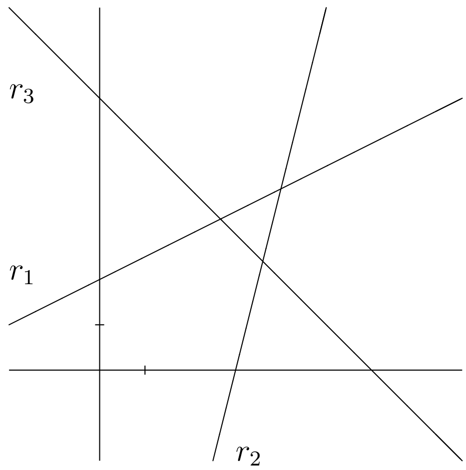
Informalmente, si puo' dire che "in generale, un sistema lineare di due equazioni in due incognite e' determinato," nel senso che le altre due possibilita' si presentano solo in presenza di certe 'coincidenze'.

6. Il generico sistema di tre equazioni lineari in $x, y$ e'

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{cases},$$

dove $a_1, b_1, c_1, \ldots, a_3, b_3, c_3$ sono costanti reali.

Informalmente, si puo' dire che "in generale, un sistema lineare di tre equazioni in due incognite e' impossibile."




7. Siano $x, y, z$ tre incognite reali. Un esempio di equazione lineare in $x, y, z$ e'

$$5x + 2y + z = 5$$

Un esempio di una soluzione di questa equazione e' dato dai valori $x = 1$ e $y = 0$ e $z = 0$ delle incognite, in breve dalla terna ordinata $(1, 0, 0)$.

Possiamo determinare tutte le soluzioni dell'equazione ricavando un'incognita

$$z = -5x - 2y + 5$$

in funzione delle altre e ponendo quest'ultime uguali a due parametri liberi. Le soluzioni dell'equazione sono date dai valori

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -5s - 2t + 5 \end{cases}$$

ottenuti al variare del parametri $s$ e $t$ fra i numeri reali. In altri termini, le soluzioni sono date dalle terne ordinate

$$(s, t, -5s - 2t + 5), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Fissate nello spazio tre rette incidenti in un unico punto e mutuamente ortogonali, una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita $x$, una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita $y$, una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita $z$, possiamo identificare ogni terna ordinata di numeri reali con un punto dello spazio.

Al variare dei parametri $s$ e $t$ in $\mathbb{R}$, i punti $(s,t,-5s-2t+5)$ descrivono un piano nello spazio. Assegnando ai parametri i valori $(s,t)=(0,0)$, $(s,t)=(1,0)$, e $(s,t)=(0,1)$, otteniamo i tre punti $(0,0,5)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,3)$; il piano passante per questi tre punti rappresenta l'insieme delle soluzioni dell'equazione data.

8. Le equazioni lineari nelle incognite $x,y,z$ sono le equazioni della forma

$$ax+by+cz=d,$$

dove $a,b,c,d$ sono costanti reali; $a,b$ e $c$ sono detti i coefficienti e $d$ il termine noto del'equazione.

Se $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, allora l'equazione ha infinite soluzioni che dipendono da due parametri reali; l'insieme delle soluzioni e' un piano nello spazio. Se $(a,b,c)=(0,0,0)$ e $d\neq 0$, allora l'equazione non ha soluzioni. Se $(a,b,c)=(0,0,0)$ e $d=0$, allora l'equazione ha per soluzioni tutte le terne ordinate di numeri reali; l'insieme delle soluzioni e' l'intero spazio.

Informalmente, si puo' dire che "in generale, un'equazione lineare in tre incognite e' indeterminta, con soluzioni che dipendono da due parametri reali".

9. Un esempio di sistema di due equazioni lineari in $x,y,z$ e'

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 5x+6y+7z=8 \end{cases}.$$

L'insieme delle soluzioni della prima equazione e' un piano $\alpha_1$, l'insieme delle soluzioni della seconda equazione e' un piano $\alpha_2$, e l'insieme delle soluzioni del sistema e' costituito dai punti comuni a $\alpha_1$ e $\alpha_2$.

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di sostituzione:

- dalla prima equazione ricaviamo l'incognita $x$ in funzione delle incognite $y,z$, e sostituiamo nella seconda equazione

$$\begin{cases} x=-2y-3z+4 \\ 5(-2y-3z+4)+6y+7z=8 \end{cases},$$

cosi' che nella seconda equazione compaiano solo le $y,z$, e si ha

$$\begin{cases} x=-2y-3z+4 \\ -4y-8z=-12 \end{cases};$$

- dalla seconda equazione ricaviamo la $y$ in funzione della $z$, e sostituiamo nella prima, ottenendo cosi' anche la $x$ in funzione della $z$ :

$$\begin{cases} x=-2(-2z+3)-3z+4=z-2 \\ y=-2z+3 \end{cases}.$$

Il sistema ha le infinite soluzioni

$$(t-2, -2t+3, t),$$

dipendenti da un parametro reale $t$.

Al variare del parametro $t$ in $\mathbb{R}$, i punti $(t-2, -2t+3, t)$ descrivono una retta $r$ nello spazio. Assegnando al parametro i valori $t=0$ e $t=1$ otteniamo i punti $(-2, 3, 0)$ e $(-1, 1, 1)$; la retta congiungente questi due punti e' la retta $r$.

I piani $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono incidenti nella retta $r$.

10. Il generico sistema di due equazioni lineari in $x, y, z$ e'

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases},$$

dove $a_i, b_i, c_i, d_i$ sono costanti reali.

Supponiamo che $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0, )$ per $i = 1, 2$, cosi' che alle due equazioni corrispondano due piani $\alpha_1$ e $\alpha_2$. Allora si hanno i tre casi:

- se le due terne $(a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2$, non sono proporzionali, allora il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un parametro reale. I due piani $\alpha_1$ ed $\alpha_2$ sono incidenti in una retta.
- se le due terne $(a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2$, sono proporzionali, e se le due quaterne $(a_i, b_i, c_i, d_i)$, $i = 1, 2$, non sono proporzionali, allora le due equazioni sono incompatibili, e il sistema e' impossibile. I due piani $\alpha_1$ ed $\alpha_2$ sono paralleli e distinti.
- se le due quaterne $(a_i, b_i, c_i, d_i)$, $i = 1, 2$, sono proporzionali, allora le due equazioni sono equivalenti. I due piani $\alpha_1$ ed $\alpha_2$ sono coincidenti.

Informalmente, si puo' dire che "in generale, un sistema lineare di due equazioni in tre incognite e' indeterminato, con soluzioni dipendenti da un parametro reale."

11. Un esempio di un sistema lineare di tre equazioni nelle incognite $x, y, z$ e'

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 11 \\ 7x + 8y + 8z = 16 \end{cases}$$

Di seguito riportiamo la risoluzione, secondo il metodo di sostituzione, senza commenti.

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 5 \\ 4(-2y - 3z + 5) + 5y + 6z = 11 \\ 7(-2y - 3z + 5) + 8y + 8z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 5 \\ -3y - 6z = -9 \\ -6y - 13z = -19 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y - 3z + 5 \\ y + 2z = 3 \\ 6y + 13z = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 5 \\ y = -2z + 3 \\ 6(-2z + 3) + 13z = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 5 = 0 \\ y = -2z + 3 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ciascuna delle tre equazioni e' e' rappresentata da un piano; i tre piani sono incidenti in un punto, il punto di coordinate

$$(0, 1, 1).$$

12. Il generico sistema di tre equazioni lineari in $x, y, z$ e'

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases},$$

dove $a_i, b_i, c_i, d_i$ sono costanti reali.

Supponiamo che $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$, per $i = 1, 2, 3$, cosi' che alle tre equazioni corrispondano tre piani $\alpha_1, \alpha_2$ e $\alpha_3$. L'intersezione di questi tre piani potra' essere vuota, un punto, una retta o un piano. Dunque il sistema potra' essere impossibile, determinato, e indeterminato, con soluzioni che dipendono da uno o due parametri.

Non e' semplice, a questo punto iniziale, dire quali condizioni sui parametri del sistema caratterizzano queste quattro eventualita' (tranne l'ultima ...).

Di fatto, si ha che 'in generale' un sistema lineare di tre equazioni in tre incognte e' determinato, e che 'in generale' un sistema lineare di piu' di tre equazioni in tre incognte e' impossibile.