Matematica II - 17.11.09

Sistemi lineari - Metodo di eliminazione - Algoritmo di Gauss

Metodo di eliminazione - Esempi

1. Consideriamo il generico sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{cases}$$

di due equazioni nelle due incognite x, y.

Sommando alla seconda equazione un multiplo della prima, cioe' un'equazione del tipo

$$r(ax + by) = rp,$$

dove r e' un numero reale, otteniamo un nuovo sistema

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ cx + dy + r(ax + by) &= q + rp \end{cases}$$

che ha le stesse soluzioni del sistema dato.

Questo nuovo sistema si puo' scrivere nella forma

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ (c + ra)x + (d + rb)y &= q + rp \end{cases}.$$

Se $a \neq 0$, allora possiamo fare in modo che $c + ra = 0$, prendendo $r = -\frac{c}{a}$.

Cosi' facendo si ottiene un sistema della forma

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ d'y &= q' \end{cases},$$

nella cui seconda equazione non compare la x.

Se $d' \neq 0$, allora dalla seconda equazione possiamo ricavare il valore della y, sostituire questo valore nella prima equazione, e da questa ricavare il valore della x. Il sistema risulta essere determinato.

2. **Esempio 1**

Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y &= 3 \\ 4x + 9y &= 10 \end{cases}$$

di due equazioni nelle due incognite x, y.

Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per -4, otteniamo il nuovo sistema

$$\begin{cases} x + 2y &= 3 \\ y &= -2 \end{cases}$$

che ha le stesse soluzioni del sistema dato, e nella cui seconda equazione non compare la x.

Dalla seconda equazione abbiamo $y = -2$; sostituendo questo valore nella prima equazione, otteniamo $x - 4 = 3$, da cui ricaviamo $x = 7$. Il sistema ha una ed una sola soluzione: $(7, -2)$.

3. Il generico sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{cases}$$

di due equazioni nelle due incognite x, y puo' essere rappresentato dalla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array}\right],$$

nella cui righe compaiono i coefficienti e il termine noto delle due equazioni.

Sommando alla seconda equazione del sistema

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{cases}$$

la prima equazione moltiplicata per un numero reale r, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ (c + ra)x + (d + rb)y &= q + rp \end{cases},$$

cui corrisponde la matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c + ra & d + rb & q + rp \end{array}\right],$$

che e' la matrice ottenuta dalla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array}\right]$$

sommando a ciascun elemento della seconda riga il corrispondente elemento della prima riga moltiplicato per r. Diciamo in breve che abbiamo sommato alla seconda riga la prima riga moltiplicata per r.

Dunque possiamo eseguire il passo di eliminazione sulla matrice.

4. **Esempio 2**

Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 4x + 9y + 16z &= 2 \\ 8x + 27y + 64z &= 18 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z.

Consideriamo la matrice del sistema

$$\begin{array}{c} R \\ S \\ T \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 16 & 2 \\ 8 & 27 & 64 & 18 \end{array}\right],$$

ed eseguiamo le seguenti operazioni:

- usiamo la prima riga per annullare il primo elemento nelle seguenti righe:

$$\begin{array}{cc} R & \\ S & -2R \\ T & -4R \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 15 & 48 & 18 \end{array}\right].$$

- usiamo la seconda riga per annullare il secondo elemento della terza riga:

$$\begin{array}{cc} R & \\ S & \\ T & -5S \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right].$$

Ora, a questa matrice corrisponde il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y + 4z & = & 0 \\ 3y + 8z & = & 2 \\ 8z & = & 8 \end{array}\right. .$$

Dalla terza equazione

$8z = 8$

ricaviamo $z = 1$; sostituendo questo valore della z nella seconda equazione otteniamo

$3y + 8 = 2$,

da cui ricaviamo $y = -2$; sostituendo questi valori della z e della y nella prima equazione otteniamo

$2x - 6 + 4 = 0$,

da cui ricaviamo $x = 1$.

Il sistema e' dunque determinato, ed ha soluzione $(1, -2, 1)$.

5. **Esempio 3**

Sia dato il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + 4z & = & 1 \\ 3x + 7y + 9z & = & 1 \\ 3x + 8y + 6z & = & -1 \end{array}\right.$$

nelle incognite x, y, z.

Consideriamo la matrice del sistema

$$\begin{array}{c} R \\ S \\ T \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & -1 \end{array}\right],$$

ed eseguiamo le seguenti operazioni:

- usiamo la prima riga per annullare il primo elemento nelle seguenti righe:

$$\begin{array}{cc} R & \\ S & -3R \\ T & -3R \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{array}\right].$$

- usiamo la seconda riga per annullare il secondo elemento della terza riga:

$$\begin{array}{cc} R & \\ S & \\ T & -2S \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ora, a questa matrice completa corrisponde il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + 4z & = & 1 \\ y - 3z & = & -2 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. ,$$

che equivale al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + 4z & = & 1 \\ y - 3z & = & -2 \end{array}\right. .$$

Dalla seconda equazione

$y - 3z = -2$

ricaviamo $y = 3z - 2$ in funzione della z; sostituendo questa espressione della y nella prima equazione otteniamo

$x + 2(3z - 2) + 4z = 1,$

da cui ricaviamo $x = -10z+5$ in funzione della z. Posto z uguale a un parametro t, abbiamo che le soluzioni sono date da

$$(-10t + 5, 3t - 2, t),$$

dove t varia in $\mathbb{R}$. Il sistema e' dunque indeterminato.

Sistemi lineari - Terminologia

1. Nel seguito, considereremo $n-$ple ordinate

$$(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

di numeri reali. Per $n = 1, 2, 3$ una $n-pla$ si puo' identificare rispettivamente con un punto su una retta, un piano, o nello spazio; si vedra' che i fatti geometrici salienti della geometria dello spazio continuano a valere anche per $n > 3$: gli oggetti avranno pero' natura piu' propriamente algebrica, e cosi' anche i risultati e le loro dimostrazioni.

Un'*equazione lineare* nelle n incognite reali $x_1, x_2, \dots, x_n$ e' un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad cioe' \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ sono costanti reali; gli a_i sono i *coefficienti* e b e' il *termine noto* dell'equazione. Una *soluzione* di questa equazione e' una $n-$pla ordinata $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ di numeri reali che sostituiti alle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ rendono vera l'uguaglianza:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

2. Un *sistema di m equazioni lineari* in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ e' una sequaenza di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

in breve

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

dove $a_{11}, a_{12}, \dots, b_1, \dots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i *coefficienti* e i b_i sono i *termini noti* del sistema. Una *soluzione* di questo sistema e' una $n-$pla $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ di numeri reali soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Il sistema si dice

- *impossibile* se non possiede alcuna soluzione;
- *determinato* se possiede una ed una sola soluzione;
- *indeterminato* se possiede piu' di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato in realta' possiede infinite soluzioni.

Diciamo che due sistemi lineari sono *equivalenti* quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

si dice *sistema triangolare superiore.*

3. Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right];$$

nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita x_1 nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita x_2 nelle varie equazioni, ... nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni. La matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

viene detta *matrice dei coefficienti del sistema.*

Una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

viene detta *matrice triangolare superiore.*

Metodo di eliminazione - Descrizione generale. Algoritmo di Gauss

1. Consideriamo il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & p \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n & = & q \\ \vdots \end{cases}$$

in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sommando alla seconda equazione un multiplo della prima, cioe' un'equazione del tipo

$$s(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = sp,$$

dove s e' un numero reale, otteniamo un nuovo sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & p \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + s(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) & = & q + sp \\ \vdots \end{cases}$$

che ha le stesse soluzioni del sistema dato.

Questo nuovo sistema si puo' scrivere nella forma

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & p \\ (b_1 + sa_1)x_1 + (b_2 + sa_2)x_2 + \cdots + (b_n + sa_n)x_n & = & q + sp \\ \vdots \end{cases}.$$

Se $a_1 \neq 0$, allora possiamo fare in modo che $b_1 + sa_1 = 0$, prendendo $r = -\frac{b_1}{a_1}$.

Cosi' facendo si ottiene un sistema della forma

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & p \\ \qquad b'_2x_2 + \cdots + b'_nx_n & = & q' \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases},$$

nella cui seconda equazione non compare la x_1. In generale si possono sommare alla seconda, terza, ... equazione opportuni multipli della prima equazione in modo da eliminare da ciascuna di queste equazioni l'incognita x_1.

Se $b'_2 \neq 0$, si puo' poi procedere usando la seconda equazione per eliminare l'incognita x_2 dalla terza, quarta, quinta ... equazione ... e cosi' via.

2. Il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & p \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n & = & q \\ \vdots \end{cases}$$

nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puo' essere rappresentato dalla matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & p \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right],$$

nella cui righe compaiono i coefficienti e il termine noto delle varie equazioni.

Sommando alla seconda equazione del sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & p \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n & = & q \\ \vdots \end{cases}$$

la prima equazione moltiplicata per un numero reale s, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n & = & p \\ (b_1 + sa_1)x_1 + (b_2 + sa_2)x_2 + \dots + (b_n + sa_n)x_n & = & q + sp \\ \vdots \end{cases} .$$

cui corrisponde la matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n & p \\ b_1 + sa_1 & b_2 + sa_2 & \dots & b_n + sa_n & q + sp \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right],$$

che e' la matrice ottenuta dalla matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n & p \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

sommando a ciascun elemento della seconda riga il corrispondente elemento della prima riga moltiplicato per s. Diciamo in breve che abbiamo sommato alla seconda riga la prima riga moltiplicata per s.

Dunque possiamo eseguire i passi di eliminazione sulla matrice del sistema.

3. **Descrizione informale dell'algoritmo di Gauss.**

L'algoritmo di Gauss prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala per righe con m righe ed n colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le seguenti *operazioni elementari per righe*:

- sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
- scambiare due righe.

Diamo di seguito una descrizione informale dell'algoritmo.

Un ruolo cruciale e' giocato dal concetto di *pivot* di una riga: esso e' il primo elemento non nullo della riga. Tutte le righe posseggono un pivot, tranne la riga composta solo di zeri.

Sia data una matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

con m righe ed n colonne. Se tutte le righe sono nulle allora l'algoritmo termina, e porge questa matrice.

Se qualche riga non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la prima riga sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle. La matrice assume allora la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{j_1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

dove $a_{j_1} \neq 0$. Sommando alla seconda, terza, ... riga un opportuno multiplo della prima riga, possiamo annullare tutti gli elementi sotto il pivot della prima riga, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & a_{j_1+1} & \dots \\ 0 & \dots & & 0 & b_{j_1+1} & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Se tutte le righe dalla seconda in poi sono nulle allora l'algoritmo termina, e porge questa matrice.

Se qualche riga dalla seconda in poi non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la seconda riga sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle dalla seconda in poi. La matrice assume allora la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & \dots & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & b_{j_2} & \dots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & c_{j_2} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

dove $a_{j_1}, b_{j_2} \neq 0$ e $j_1 < j_2$. Sommando alla terza, quarta, ... riga un opportuno multiplo della seconda riga, possiamo annullare tutti gli elementi sotto il pivot della seconda riga, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & \dots & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & b_{j_2} & b_{j_2+1} & \dots \\ 0 & \dots & & & \dots & & 0 & c_{j_2+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Se tutte le righe dalla terza in poi sono nulle allora l'algoritmo termina, e porge questa matrice.

Se qualche riga dalla terza in poi non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la terza riga di sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle dalla terza in poi ....

L'algoritmo termina porgendo una matrice della forma

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \dots & 0 & a_{j_1} & & & & & & & & & & & \\
0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & b_{j_2} & & & & & & & & \\
0 & \dots & & & \dots & & 0 & \dots & 0 & c_{j_3} & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & & & & & \\
0 & \dots & & & \dots & & & \dots & & & \dots & 0 & f_{j_p} & \dots & f_n \\
0 & \dots & & & \dots & & & \dots & & & \dots & & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right],$$

con $a_{j_1}, b_{j_2}, c_{j_3}, \dots, f_{j_p} \neq 0$ e $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_p$.
Una matrice di questo tipo si dice *matrice a scala per righe*.