Matematica II - 18.11.09

Sistemi lineari - Qualche proposizione generale

1. Possiamo usare l'algoritmo di Gauss per risolvere i sistemi lineari in modo meccanico.

   Sia dato un sistema lineare

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

   di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$. Consideriamo la matrice del sistema

   $$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

   ed applichiamo a questa matrice l'algoritmo di Gauss, ottenendo cosi' una matrice a scala per righe, che sara' del tipo

   $$\left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \ldots & 0 & a'_{1j_1} & & & & & & & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \ldots & 0 & a'_{2j_2} & & & & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & & & \ldots & & & \ldots & 0 & a'_{pj_p} & \ldots \; a'_{pn} & b'_p \\ 0 & \ldots & & & \ldots & & & \ldots & 0 & 0 & \ldots \; 0 & b'_{p+1} \\ \vdots & & & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \end{array}\right],$$

   con $a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \ldots, a'_{pj_p} \neq 0$; $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$, e $0 \leq p$. A questa matrice corrisponde il sistema

   $$\begin{cases} a'_{1j_1}x_{j_1} + \;\ldots \qquad\qquad\qquad + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{2j_2}x_{j_2} + \;\ldots \qquad\quad + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a'_{pj_p}x_{j_p} + \;\ldots\; + a'_{pn}x_n = b'_p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_{p+1} \end{cases},$$

   che e' equivalente al sistema dato.

   Se $b'_{p+1} \neq 0$, il sistema e' impossibile.

   Se $b'_{p+1} = 0$, allora il sistema ha soluzioni. Per $p = n$, il sistema e' determinato. Per $p < n$ possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite

   $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}$,

   riguardando le altre incognite come parametri, e il sistema e' indeterminato.

2. **Esempio**

   Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 4x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 7x_5 & = & 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 12x_5 & = & 0 \end{cases}$$

   nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_5$. Questo sistema ha almeno una soluzione: $x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 0$. Vediamo se ne ha altre.

   Al sistema corrisponde la matrice

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 5 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 8 & 12 & 0 \end{array}\right],$$

   che dall'algoritmo di Gauss viene trasformata nella matrice a scala per righe

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 5 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ -4x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ x_4 + 7x_5 & = & 0 \end{cases}$$

   Possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite

   $x_1, x_2, x_4,$

   riguardando le altre incognite x_3, x_5 come parametri. Il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da due parametri, e' indeterminato.

3. Un sistema lineare di m equazioni in n incognite nel quale tutti itermini noti sono nulli, cioe' un sistema del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

   viene detto *sistema lineare omogeneo.* Un tale sistema ha sempre almeno la soluzione

   $x_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n;$

   questa soluzione viene detta *soluzione banale* del sistema.

   Proposizione 1. *Sia dato un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Se $m < n$, il sistema ha infinite soluzioni.*

Dimostrazione Siano x_i le incognite del sistema, $i = 1, \ldots, n$. La matrice A del sistema ha m righe ed $n+1$ colonne, e l'ultima colonna e' nulla; A viene trasformata dall'algoritmo di Gauss in una matrice S a scala per righe, con m righe ed $n+1$ colonne, e l'ultima colonna nulla. Sia p il numero dei pivot della matrice S, e siano

$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$

gli indici delle colonne nelle quali compaionio i pivot. Poiche' in ciascuna riga possiede al piu' un pivot, si ha

$p \leq m.$

Per ipotesi e' $m < n$. Duque

$p < n.$

Ne segue che c'e' almeno una colonna nella quale non compare alcun pivot. L'incognita corrispondente a tale colonna puo' essere posta uguale a un parametro libero, cosi' il sistema ha infinite soluzioni.

4. Data la matrice quadrata

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{bmatrix},$$

consideriamo il generico sistema lineare che ha matrice dei coefficienti A, cioe' un sistema del tipo

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z & = & p \\ 4x + 9y + 16z & = & q \\ 8x + 27y + 64z & = & r \end{cases},$$

dove p, q, r sono costanti reali. Ci chiediamo sotto quali condizioni su p, q, r il sistema risulta essere determinato, impossibile, indeterminato.

La corrispondente matrice e'

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & p \\ 4 & 9 & 16 & q \\ 8 & 27 & 64 & r \end{array}\right].$$

Essa viene trsformata dall'algoritmo di Gauss nel modo seguente:

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 2 & 3 & 4 & p \\ 0 & 3 & 8 & q-2p \\ 0 & 15 & 48 & r-4p \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 2 & 3 & 4 & p \\ 0 & 3 & 8 & q-2p \\ 0 & 0 & 8 & r-5q+6p \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z & = & p \\ 3y + 8z & = & q - 2p \\ 8z & = & r - 5q + 6p \end{cases}.$$

Per ogni valore di p, q, r, questo sistema si puo' risolvere per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione, e' sempre determinato.

5. Data la matrice quadrata
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix},$$
consideriamo il generico sistema lineare che ha matrice dei coefficienti A, cioe' un sistema del tipo
$$\begin{cases} x + 2y + 4z &= p \\ 3x + 7y + 9z &= q \\ 3x + 8y + 6z &= r \end{cases},$$
dove p, q, r sono costanti reali. Ci chiediamo sotto quali condizioni su p, q, r il sistema risulta essere determinato, impossibile, indeterminato.

La corrispondente matrice e'
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & p \\ 3 & 7 & 9 & q \\ 3 & 8 & 6 & r \end{array}\right].$$
Essa viene trsformata dall'algoritmo di Gauss nel modo seguente:
$$\left[\begin{array}{ccr|l} 1 & 2 & 4 & p \\ 0 & 1 & -3 & q-3p \\ 0 & 2 & -6 & r-3p \end{array}\right],$$
$$\left[\begin{array}{ccr|l} 1 & 2 & 4 & p \\ 0 & 1 & -3 & q-3p \\ 0 & 0 & 0 & r-2q+3p \end{array}\right].$$
A questa matrice corrisponde il sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 4z &= p \\ y - 3z &= q - 3p \\ 0 &= r - 2q + 3p \end{cases}.$$
Per $r - 2q + 3p \neq 0$, il sistema e' impossibile. Per $r - 2q + 3p = 0$, il sistema e' indeterminato.

6. Gli esempi precedenti suggeriscono le seguenti considerazioni.

Una matrice traingolare superiore nella quale tutti gli elementi della diagonale sono non nulli si dice *matrice triangolare superiore non degenere.* Essa e' dunque una matrice del tipo
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$
dove
$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots \neq 0.$$

Proposizione 2. *Data una matrice quadrata*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

consideriamo il sistemi lineari aventi matrice dei coefficienti A :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad b_i \in \mathbb{R}.$$

Sia S *la matrice a scala per righe prodotta dall'algoritmo di Gauss su* A.

Se la matrice triangolare superiore S *e' non degenere, allora tutti questi sistemi sono determinati; se* S *e' degenere, allora alcuni di questi sistemi sono impossibili, altri sono indeterminati, e nessuno e' determinato.*

Dimostrazione della prima affermazione. A ciascun sistema corrisponde una matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] =: [A|b].$$

Essa viene trasformata dall'algoritmo di Gauss in una matrice del tipo

$$[S|b'] := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b'_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b'_n \end{array}\right],$$

dove i b'_i sono numeri reali.

Per ipotesi S e' triangolare superiore non degenere, cioe'

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0.$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b'_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n &= b'_n \end{cases}$$

Per ogni valore dei b'_i, questo sistema si puo' risolvere per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione, e' sempre determinato.

7. Dal punto precedente segue che

> *Sia* A *una matrice quadrata. Allora o tutti i sistemi lineari con matrice dei coefficienti* A *sono determinati, oppure nessuno di essi lo e'.*