Matematica II 25.11.09

Autovettori e Autovalori

1. **Equazioni alle differenze finite**

   Consideriamo un "sistema" caratterizzato da una variabile reale x, che in uno "stato iniziale" assume un certo valore

   $x(0) = b,$

   e che nel passaggio da un "tempo" t ad un "tempo successivo" $t+1$ si evolve secondo una legge del tipo

   $x(t+1) = ax(t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$

   dove $a \in \mathbb{R}$ e' un numero reale assegnato. Si avra' cosi' che

   $x(1) = ax(0) = ab$

   $x(2) = ax(1) = a^2b$

   $\vdots$

   $x(t) = ax(t-1) = a^tb$

   $\vdots$

   e, nel caso $b > 0$,

   $$lim_{t\to\infty}x(t) = lim_{t\to\infty}a^tb = \begin{array}{cr} \infty & se\ a < 1 \\ \nexists & se\ a = -1 \\ 0 & se\ -1 < a < 1 \\ b & se\ a = 1 \\ +\infty & se\ a > 1 \end{array}.$$

   Consideriamo ora un "sistema" caratterizzato da una coppia ordinata (x, y) di variabili reali, che in uno "stato iniziale" assume un certo valore

   $\begin{array}{l} x(0) = b \\ y(0) = c \end{array},$

   e che nel passaggio da un "tempo" t ad un "tempo successivo" $t+1$ si evolve secondo una legge del tipo

   $$\begin{cases} x(t+1) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y(t+1) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

   dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sono numeri reali assegnati. Si possono ancora dare delle formule per i valori delle variabili al tempo t in funzione dei valori iniziali b, c e delle costanti a_{ij}, ma in pratica conviene seguire altre vie.

   L'idea e' di trovare, quando possibile, un modo di ricondursi al caso particolarmente semplice in cui ogni variabile si trasformi indipendentemente dall'altra, descritto da una relazione del tipo

$$\begin{cases} x(t+1) &= a_1 x(t) \\ y(t+1) &= a_2 y(t) \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

per la quale si ha

$$\begin{cases} x(t) &= a_1^t b \\ y(t) &= a_2^t c \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

Il formalismo matriciale permette di esprimere il problema in una forma adatta per una generalizzazione. Consideriamo ora un "sistema" caratterizzato da una colonna x di n variabili reali, che in uno "stato iniziale" assume un certo valore

$x(0) = b$,

e che nel passaggio da un "tempo" t ad un "tempo successivo" $t+1$ si evolve secondo una legge del tipo

$x(t+1) = Ax(t) \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$

dove A e' una matrice quadrata di ordine n assegnata. Si avra' cosi' che

$x(1) = Ax(0) = Ab$

$x(2) = Ax(1) = A^2 b$

$\vdots$

$x(t) = Ax(t-1) = A^t b$

$\vdots$

Non e' difficile dare delle formule per le potenze di una matrice, ma in pratica conviene seguire altre vie.

L'idea e' di trovare, quando possibile, un modo di ricondursi al caso particolarmente semplice in cui la matrice sia diagonale.

2. Una matrice quadrata, come

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

nella quale tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, viene detta *matrice diagonale.* Possiamo rappresentare una qualsiasi matrice diagonale di ordine n come

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

scrivendo solo gli elementi sulla diagonale.

Si verifica che premoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciascuna riga r_i' di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} r'_1 \\ \hline r'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline r'_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_1 r'_1 \\ \hline a_2 r'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n r'_n \end{array}\right]$$

Si verifica che postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna colonna c_i di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 c_1 & a_2 c_2 & \dots & a_n c_n \end{array}\right].$$

In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{bmatrix}$$

Piu' in particolare, la potenza $t-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $t-$ma sono le potenze $t-$me degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_1^t & & & \\ & a_2^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^t \end{bmatrix}$$

3. Mostriamo ora su un esempio come il calcolo delle potenze di una matrice non diagonale possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.

   Sia data la matrice
   $$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

   Ci sono delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice: una e'
   $$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Au = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = u;$$

un'altra e'

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Av = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\ v.$$

In entrambi i casi, A agisce come la moltiplicazione per un numero reale:

$$Au = 1\ u, \qquad Av = 0.5\ v.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A\left[\ u \mid v\ \right] &= \left[\ Au \mid Av\ \right] \\ &= \left[\ \quad u \mid 0.5\ v\ \right] \\ &= \left[\ u \mid v\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$P = \left[\ u \mid v\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = \left[\ u \mid v\ \right] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$\begin{aligned}
A &= PDP^{-1} \\
A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\
A^3 &= PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\
&\vdots \\
A^t &= PDP^{-1}PD^{t-1}P^{-1} = PD^tP^{-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Cosi' abbiamo

$$\begin{aligned}
A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & (0.5)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\
&= ...
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
lim_{t\to\infty} A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4. In generale, data una matrice A quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice ...

   Definizione *Se la matrice A quadrata di ordine n agisce su una colonna non nulla $v \in \mathbb{R}^n$ come la moltiplicazione per un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$*

   $$Av = \lambda v,$$

   allora si dice che v e' un autovettore di A e che λ e' un autovalore di A.

   Se la matrice A possiede n autovettori [1] $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, cioe' se

   $$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad \ldots \quad Av_n = \lambda_n v_n,$$

[1] potrebbe non possederne alcuno.

allora si ha

$$\begin{aligned} A\left[\ v_1 \mid v_2 \mid \dots \ \ v_n\ \right] &= \left[\ Av_1 \mid Av_2 \mid \dots \ \ Av_n\ \right] \\ &= \left[\ \lambda_1 v_1 \mid \lambda_2 v_2 \mid \dots \ \ \lambda_n v_n\ \right] \\ &= \left[\ v_1 \mid v_2 \mid \dots \ \ v_n\ \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indichiamo con P

$$P = \left[\ v_1 \mid v_2 \mid \dots \ \ v_n\ \right]$$

la matrice quadrata di ordine n avente come colonne gli n autovettori v_i, ed indichiamo con D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale di ordine n con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.

Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Se capita che la matrice

$$P = \left[\ v_1 \mid v_2 \mid \dots \ \ v_n\ \right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, [2] allora possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$A^t = PD^tP^{-1}.$$

[2]potrebbe non esistere alcuna matrice invertibile con colonne autovettori.