Matematica II - 27.11.09

Addizione, moltiplicazione per scalari, trasposizione.

1. **Somma di due matrici.**

   Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B, si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice somma di A e B ed indicata con
   $$A + B.$$
   In simboli, si ha
   $$(A+B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j), \qquad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

   Esempio:
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 11 & 15 \\ 14 & 18 \end{bmatrix}$$
   Nel caso $m = n = 1$ abbiamo l'usuale somma di numeri reali. L'addizione di matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ possiede le stesse proprieta', associativa e commutativa, dell'addizione di numeri reali. Il ruolo che il numero zero gioca per l'addizione di numeri reali, per le matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ e' giocato dalla matrice nulla
   $$0_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
   di tipo $m \times n$, nel senso che
   $$0_{m,n} + A = A = A + 0_{m,n}, \qquad \textit{per ogni } A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

2. **Prodotto di una matrice per un numero reale**

   Date una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ di tipo $m\times n$, e dato uno scalare r in $\mathbb{R}$, moltiplicando ciascun elemento di A per lo scalare r si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice prodotto della matrice A per lo scalare r, ed indicata con
   $$rA.$$
   In simboli, si ha
   $$(rA)(i,j) = rA(i,j) \qquad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

   Esempio:

$$7\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione o la postmoltiplicazione di A per opportune matrici.

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \end{bmatrix} &= 7\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In generale, la moltiplicazione di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione di A per la matrice rI_m oppure come la postmoltiplicazione di A per la matrice rI_n :

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

Per questa ragione, le matrici rI vengono dette *matrici scalari.*

3. L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{aligned} (A+B)C &= AC+BC \\ B(C+D) &= BC+BD \end{aligned}$$

per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.

Le operazioni di prodotto di matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice sono legate dalla proprieta'

$$r(PQ) = (rP)Q = P(rQ)$$

per ogni P, Q matrici moltiplicabili ed ogni scalare r.

4. **Matrice trasposta**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con

$$A^T.$$

In simboli, si ha:

$$A^T(i,j) = A(j,i), \qquad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m.$$

Ad esempio, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

$\left(A^T\right)^T = A,$

per ogni matrice A;

$(A+B)^T = A^T + B^T$

per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

$(AB)^T = B^T A^T$

per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

$(rA)^T = rA^T$

per ogni matrice A ed ogni scalare r.

Dimostriamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

$$(AB)^T = B^T A^T$$

e' consistente, cioe' che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti, da un lato, la matrice AB e' definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)^T$ ha tipo $p \times m$; dall'altro, la matrice B^T ha tipo $p \times n$, la matrice A^T ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^T A^T$ e' definita ed ha tipo $p \times m$.

Proviamo ora che

$$(AB)^T(i,j) = \left(B^T A^T\right)(i,j), \qquad i = 1, \ldots, p; \; j = 1, \ldots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned} (AB)^T(i,j) &= (AB)(j,i) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(j,h)B(h,i), \end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\begin{aligned} \left(B^T A^T\right)(i,j) &= \sum_{h=1}^{n} B^T(i,h)A^T(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} B(h,i)A(j,h), \end{aligned}$$

e i due risultati sono uguali per la proprieta' commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Per finire, osserviamo che una matrice quadrata A e' invertibile se e solo se la sua trasposta A^T e' invertibile, inoltre l'inversa della trasposta e' la trasposta dell'inversa:
$\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.
Ad esempio, da
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$,
segue
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$.

Verifichiamo questa proprieta'. "A e' invertibile ed ha inversa B" significa che

$AB = I = BA$;

trasponendo ciascun membro di queste uguaglianze, otteniamo

$(AB)^T = I^T = (BA)^T$,

da cui otteniamo

$B^T A^T = I = A^T B^T$;

queste ultime uguaglianze significano che "A^T e' invertibile ed ha inversa B^T".

Determinanti, del secondo ordine

1. Sia n un intero positivo fissato. Data una matrice A quadrata di ordine n

$$A \quad = \quad [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}\,,$$

consideriamo i sistemi lineari

$$Ax = b \qquad (b \in \mathbb{R}^n)$$

aventi matrice dei coefficienti A. Sappiamo che questi sistemi o sono tutti determinati o nessuno di essi lo e'. Possiamo chiederci sotto quali condizioni sugli elementi a_{ij} di A succede che tutti i sistemi sono determinati, e in tale caso se c'e' una formula che esprima la soluzione del sistema in funzione degli elementi a_{ij} di A e degli elementi b_j di b. A queste domande si puo' dare risposta attraverso il concetto di determinante.

2. Per $n = 1$, una matrice quadrata di ordine 1 consiste di un solo elemento

$A = [a]$,

e le equazioni lineari

$ax = b$

con coefficiente a sono determinate se e solo se $a \neq 0$.

Definiamo il determinante $DetA$ di A ponendo:

$$DetA = Det[a] = a.$$

3. Per $n = 2$, data la matrice quadrata del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

consideriamo i sistemi lineari

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti A. Supponiamo, per semplicita', che $a, b, c, d \neq 0$.

Sappiamo che questi sistemi sono tutti determinati se e solo se le coppie (a, b) e (c, d) dei coefficienti di x, y nelle due equazioni non sono proporzionali, cioe'

$$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d},$$

o, che e' lo stesso,

$$ad - cb \neq 0.$$

Definiamo il determinante $DetA$ di A ponendo:

$$DetA = Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

Si osservi che

$$Det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1;$$

inoltre, si ha

$$DetA^T = DetA.$$

4. Possiamo parametrizzare una matrice del secondo ordine con 4 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 2 vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right], \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$DetA = Det \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right], \qquad a, b \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del secondo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
Det\left[\ a+b \mid c\ \right] &= Det\left[\ a \mid c\ \right] + Det\left[\ b \mid c\ \right] \\
Det\left[\ ra \mid c\ \right] &= r Det\left[\ a \mid c\ \right] \\
Det\left[\ a \mid b+c\ \right] &= Det\left[\ a \mid b\ \right] + Det\left[\ a \mid c\ \right] \\
Det\left[\ a \mid rb\ \right] &= r Det\left[\ a \mid b\ \right] \\
Det\left[\ a \mid a\ \right] &= 0 \\
Det\left[\ b \mid a\ \right] &= -Det\left[\ a \mid b\ \right]
\end{aligned}$$

per ogni a, b, c vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Ad esempio, la seconda proprieta' si puo' verificare cosi':

$$\begin{aligned}
Det\left[\ ra \mid b\ \right] &= Det\begin{bmatrix} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= ra_1b_2 - ra_2b_1 = r\left(a_1b_2 - a_2b_1\right) \\
&= r Det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= r Det\left[\ a \mid b\ \right].
\end{aligned}$$

La penultima proprieta' si verica immediatamente:

$$Det\left[\ a \mid a\ \right] = Det\begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 - a_2a_1 = 0.$$

5. Data la matrice A del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \left[\ a \mid b\ \right],$$

consideriamo il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases},$$

con matrice dei coefficienti A. Questo sistema si puo' riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

e sintetizzare nella forma

$$ax + by = p, \qquad a, b, p \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Osserviamo che una soluzione del sistema deve essere anche una soluzione dell'equazione

$$Det\left[\ ax+by\ \middle|\ b\ \right] = Det\left[\ p\ \middle|\ b\ \right],$$

al cui primo membro si ha

$$\begin{aligned} Det\left[\ ax+by\ \middle|\ b\ \right] &= Det\left[\ ax\ \middle|\ b\ \right] + Det\left[\ by\ \middle|\ b\ \right] \\ &= xDet\left[\ a\ \middle|\ b\ \right] + yDet\left[\ b\ \middle|\ b\ \right] \\ &= xDet\left[\ a\ \middle|\ b\ \right]. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x

$$xDet\left[\ a\ \middle|\ b\ \right] = Det\left[\ p\ \middle|\ b\ \right],$$

e in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$yDet\left[\ a\ \middle|\ b\ \right] = Det\left[\ a\ \middle|\ p\ \right].$$

Se $DetA \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente entrambe le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x &= \frac{Det\left[\ p\ \middle|\ b\ \right]}{Det\left[\ a\ \middle|\ b\ \right]} \\ y &= \frac{Det\left[\ a\ \middle|\ p\ \right]}{Det\left[\ a\ \middle|\ b\ \right]}. \end{aligned}$$

Si verifica che questa e' davvero una soluzione. Espicitamente, si ha

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_1b_2 - p_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y &= \frac{a_1p_2 - a_2p_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto la *regola di Cramer* per la risoluzione dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

Consideriamo, ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Il determinate della matrice dei coefficienti e'

$$Det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 - 4\cdot 2 = -3,$$

dunque possiamo applicare la regola di Cramer: il sistema e' determinato, e la sua soluzione e' data da

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{Det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}}{Det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1 \\
y &= \frac{Det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}{Det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2.
\end{aligned}
$$