Matematica II 01.12.09

Determinanti, del terzo ordine

1. Il determinante di una matrice del secondo ordine puo' essere indicato in vari modi, ad esempio con

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad o \qquad \mathrm{D}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad o \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

   Analoghe notazioni si usano per matrici di ordine superiore.

2. Il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine puo' essere definito come il risultato comune di tre espressioni, una per ciascuna colonna della matrice. Lo sviluppo del determinante rispetto a una certa colonna e' la somma, con certi segni, dei prodotti degli elementi della colonna per certi determinati del secondo ordine.

   Ad esempio, il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

   e' dato da uno qualsiasi dei i seguenti sviluppi:

   - secondo la prima colonna:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 10 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 10 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = -3$$

   - secondo la seconda colonna:

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \cdot (2 \cdot 10 - 3 \cdot 8) + 5 \cdot (1 \cdot 10 - 3 \cdot 7) - 6 \cdot (1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = -3$$

   - secondo la terza colonna:

$$7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + 10 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3$$

In sintesi, lo svipuppo del determinante del terzo ordine secondo la $j-$ma colonna e' la somma, con segni, di tre termini: l'$i-$mo termine della somma e' il prodotto dell'$i-$mo elemento della colonna per il determinante del secondo ordine ottenuto cancellando la $j-$ma colonna e la $i-$ma riga; il segno e' + o - secondoche $i+j$ e' pari o dispari.

3. Il generico determinante del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ha sviluppo secondo la prima colonna

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

Abbiamo ottenuto un certo polinomio omogeneo di terzo grado negli elementi della matrice. Lo stesso risultato si ottine da ciascuno degli altri sviluppi.

Questo polinomio puo' essere scritto nella forma

$$\sum_{(i_1,i_2,i_3)} sg(i_1i_2i_3)\ a_{i_1}b_{i_2}c_{i_1},$$

dove le terne (i_1,i_2,i_3) variano fra le permutazioni della terna $(1,2,3)$, e $sg(i_1i_2i_3)$ e' il segno della permutazione (i_1,i_2,i_3).

Una parola $i_1i_2i_3$ nei simboli $1,2,3$ che contenga ciascun simbolo esttamente una volta viene detta *permutazione* dell'insieme dei simboli $1,2,3$. Una coppia di simboli i_pi_q con $p<q$ e $i_p>i_q$ viene detta *inversione* della permutazione $i_1i_2i_3$; il segno

$sg(i_1i_2i_3)$

della permutazione e' $+1$ se il numero delle sue inversioni e' pari ed e' -1 se il numero delle sue inversioni e' dispari.

permutazione	*inversioni*	*numero inversioni*	*segno*
123		0	$+$
132	32	1	$-$
213	21	1	$-$
231	$21, 31$	2	$+$
312	$31, 32$	2	$+$
321	$32, 31, 21$	3	$-$

4. Osserviamo che
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3,$$
cioe' il determinante di una matrice triangolare superiore e' il prodotto degli elementi della sua diagonale. In particolare, si ha
$$Det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

5. Possiamo parametrizzare una matrice del terzo ordine con 9 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 3 vettori colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$:
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \left[\ a \ \middle| \ b \ \middle| \ c \ \right], \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$
Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^{3\times 1}$:
$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}\left[\ a \ \middle| \ b \ \middle| \ c \ \right], \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$
In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':
$$\begin{aligned}
\mathrm{D}[\ a+d \mid b \mid c\ ] &= \mathrm{D}[\ a \mid b \mid c\ ] + \mathrm{D}[\ d \mid b \mid c\ ] \\
\mathrm{D}[\ ra \mid b \mid c\ ] &= r\mathrm{D}[\ a \mid b \mid c\ ] \\
\mathrm{D}[\ a \mid b+d \mid c\ ] &= \mathrm{D}[\ a \mid b \mid c\ ] + \mathrm{D}[\ a \mid d \mid c\ ] \\
\mathrm{D}[\ a \mid rb \mid c\ ] &= r\mathrm{D}[\ a \mid b \mid c\ ] \\
\mathrm{D}[\ a \mid b \mid c+d\ ] &= \mathrm{D}[\ a \mid b \mid c\ ] + \mathrm{D}[\ a \mid b \mid d\ ] \\
\mathrm{D}[\ a \mid b \mid rc\ ] &= r\mathrm{D}[\ a \mid b \mid c\ ] \\
\mathrm{D}[\ a \mid a \mid b\ ] &= \mathrm{D}[\ a \mid b \mid b\ ] = \mathrm{D}[\ a \mid b \mid a\ ] = 0 \\
\mathrm{D}[\ b \mid a \mid c\ ] &= \mathrm{D}[\ c \mid b \mid a\ ] = \mathrm{D}[\ a \mid c \mid b\ ] = -\mathrm{D}[\ a \mid b \mid c\ ]
\end{aligned}$$
per ogni a, b, c, d vettori colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

6. Consideriamo il generico sistema lineare di tre equazioni in tre incognite
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_2x + b_2y + c_3z = p_3 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

e sintetizzare nella forma

$$ax + by + cz = p, \qquad a, b, c, p \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Da questa equazione vettoriale colonna di puo' dedurre l'equazione scalare

$$\mathrm{D}\left[\ ax + by + cz \mid b \mid c\ \right] = \mathrm{D}\left[\ p \mid b \mid c\ \right].$$

Ora, al primo membro si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\left[\ ax + by + cz \mid b \mid c\ \right] &= \mathrm{D}\left[\ ax \mid b \mid c\ \right] + \mathrm{D}\left[\ by \mid b \mid c\ \right] + \mathrm{D}\left[\ cz \mid b \mid c\ \right] \\ &= \mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right] x + \mathrm{D}\left[\ b \mid b \mid c\ \right] y + \mathrm{D}\left[\ c \mid b \mid c\ \right] z \\ &= \mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right] x, \end{aligned}$$

e cosi' abbiamo l'equazione

$$\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right] x = \mathrm{D}\left[\ p \mid b \mid c\ \right]$$

nella sola incognita x.

In modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right] y = \mathrm{D}\left[\ a \mid p \mid c\ \right],$$

e l'equazione nella sola incognita z

$$\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right] z = \mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid p\ \right].$$

Ora, sotto la condizione $\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right] \neq 0$, possiamo ricavare univocamente le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{D}\left[\ p \mid b \mid c\ \right]}{\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right]} \\ y &= \frac{\mathrm{D}\left[\ a \mid p \mid c\ \right]}{\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right]} \\ z &= \frac{\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid p\ \right]}{\mathrm{D}\left[\ a \mid b \mid c\ \right]}. \end{aligned}$$

Si puo' verificare che questa e' davvero una soluzione.

Abbiamo cosi' ottenuto la *regola di Cramer* per la risoluzione dei sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite.

7. Si verifica che il determinante di una matrice del terzo ordine coincide col determinante della sua trasposta:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

in breve

$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(A^T).$$

Un determinante del terzo ordine potra' dunque essere calcolato non solo tramite sviluppi per colonne, ma anche tramite sviluppi per righe.

Lo svipuppo secondo la $i-$ma riga e' la somma, con segni, di tre termini: il $j-$mo termine della somma e' il prodotto del $j-$mo elemento della riga per il determinante del secondo ordine ottenuto cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna; il segno e' + o - secondoche $i + j$ e' pari o dispari.

Inoltre, si avranno proprieta' espresse nei termini delle righe.

8. Possiamo parametrizzare una matrice del terzo ordine anche con 3 vettori riga in $\mathbb{R}^{1\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad a', b', c' \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^{1\times 3}$:

$$\mathrm{Det} A = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \qquad a', b', c' \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato da proprieta' analoghe a quelle sopra elencate nei termini delle colonne.

9. Le proprieta' del determinate rispetto alle righe ci permettono di descrivere l'effetto che ciascuna delle operazioni elementari sulle righe di una matrice ha sul determinante della matrice:

   - l'operazione di scambiare due righe ha come effetto di cambiare il segno del determinante;
   - l'operazione di moltiplicare una riga per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha come effetto di moltiplicare il determinante per r;
   - l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante.

   Le prime due affermazioni sono chiare. Verifichiamo la terza, nel caso delle prime due righe.

$$A = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a' \\ b' + ra' \\ c' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } B &= \text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ b' + ra' \\ c' \end{bmatrix} \\ &= \text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} + r\text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ a' \\ c' \end{bmatrix} \\ &= \text{Det} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \text{Det } A. \end{aligned}$$

Grazie a questa proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica A trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare superiore T, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di T, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

10. **Applicazione.**

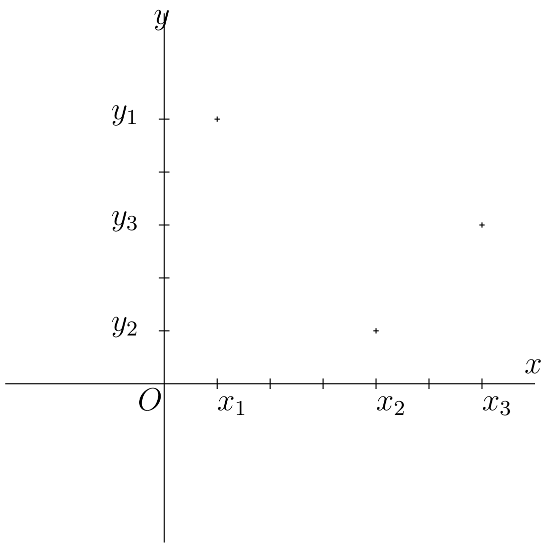
Sono dati sei numeri reali $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$, e si vuole determinare un polinomio

$f(x) = a + bx + cx^2$

tale che

$f(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$

Ci si chiede: sotto quali condizioni esiste un tale polinomio? nei casi in cui esiste, ne esiste esattamente uno? nei casi in cui ne esiste esattamente uno, in che modo i coefficienti del polinomio dipendono dai dati iniziali?



Per evitare condizioni fra loro contraddittorie, o ripetute, imponiamo la condizione che i tre numeri x_1, x_2, x_3 siano a due a due distinti:

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3.$

Ora, le tre condizioni imposte si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a + bx_1 + cx_1^2 & = y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 & = y_2 \\ a + bx_3 + cx_3^2 & = y_3 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c. Calcoliamo ora il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} & = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \\
& = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{bmatrix} \\
& = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} \\
& = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{bmatrix} \\
& = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
\end{aligned}$$

Sotto le condizioni imposte

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3,$

questo determinante e' non nullo. Dunque il sistema lineare ha, per ogni valore di y_1, y_2, y_3, esattamente una soluzione, data da

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}} \\
b &= \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}} \\
c &= \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}.
\end{aligned}
$$

Svolgiamo i calcoli solo per l'incognita c; otteniamo:

$$c = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$