Matematica II 04.12.09

Vettori, indipendenza lineare, dimensione

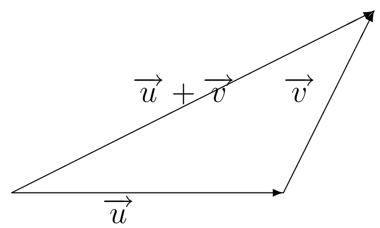
Vettori nello spazio

In Cinematica, uno dei primi concetti e' quello di spostamento, a partire dal quale si definiscono velocita' e accelerazioni. Gli spostamenti sono esempi di "vettori." Fino ad avviso contrario, tutte le considerazioni seguenti si svolgono nell'ambito dello spazio ordinario, intuitivamente inteso. Il tono della presentazione sara' informale.

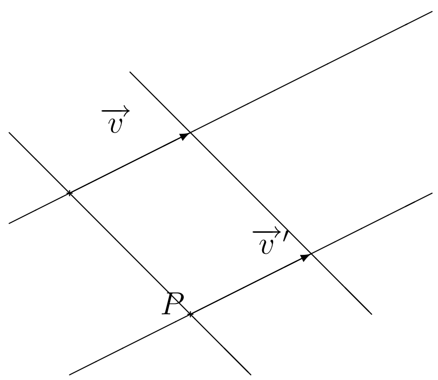
1. **Vettori**

   Col termine "vettore" intendiamo un segmento con un verso di percorrenza privilegiato, avente cosi' un primo estremo ed un ultimo estremo. Rappresentiamo ciascun vettore con con una freccia avente coda nel primo estremo e punta nel secondo estremo, e lo indichiamo con un simbolo come $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \ldots,$

   Sia $\overrightarrow{u}$ un vettore la cui punta che coincide con la coda di un vettore $\overrightarrow{v}$; definiamo allora il vettore somma
   $$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$
   come il vettore avente coda nella coda di $\overrightarrow{u}$ e punta nella punta di $\overrightarrow{v}$.

   Diciamo che due vettori sono *equivalenti* quando hanno la stessa direzione, lunghezza, e verso. In altri termini, due vettori $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}'$ sono equivalenti se congiungendo le loro code e congiungendo le loro punte si ottiene un parallelogramma.

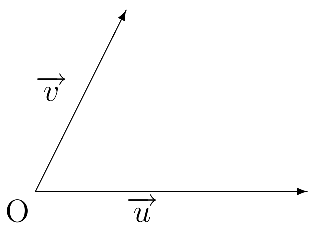
   

Dato un vettore $\overrightarrow{v}$ e un punto P, si ha che c'e' uno ed un solo vettore $\overrightarrow{v}'$ che ha coda in P ed e' equivalente a $\overrightarrow{v}$.

2. **Vettori con origine in un punto fissato**

   Nel seguito, diremo "origine" di un vettore al posto di "coda" di un vettore.

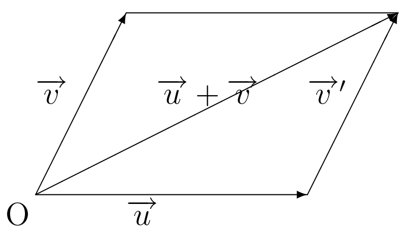
   Fissato nello spazio un punto O, consideriamo l'insieme $\mathcal{S}_O$ dei vettori con origine in O. Dati due vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ con origine in O,



   definiamo il vettore loro somma

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

   come la diagonale, uscente da O, del parallelogramma che ammette $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ come lati.



   Si osservi che

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}'$$

   dove $\overrightarrow{v}'$ e' il vettore equivalente a $\overrightarrow{v}$ avente origine nella punta di $\overrightarrow{u}$.

   Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa

   $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$,

   e associativa:

   $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$,

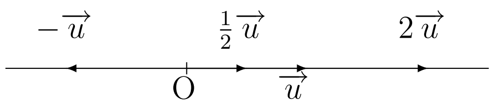
   per ogni terna di vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.

   Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore i cui estremi coincidono con il punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo $\overrightarrow{0}$. La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni $\overrightarrow{v}$, il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con $-\overrightarrow{v}$.

3. Dato un vettore $\overrightarrow{v}$ con origine in O, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per $\overrightarrow{v}$: per un numero intero n, si pone

$$n\overrightarrow{v} = \begin{cases} \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} + \cdots + \overrightarrow{v} & n \text{ volte} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots \\ \overrightarrow{0} & \qquad\qquad\; \text{per } n = 0 \\ (-\overrightarrow{v}) + (-\overrightarrow{v}) + \cdots + (-\overrightarrow{v}) & -n \text{ volte} \quad \text{per } n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori con origine O, che fornisce un vettore con origine O, e la moltiplicazione di un vettore con origine O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore con origine O.

Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, ne' moltiplicare vettori per vettori.

L'insieme $\mathcal{S}_0$, munito di queste operazioni, viene detto *spazio vettoriale geometrico con origine* O.

4. **Combinazioni lineari**

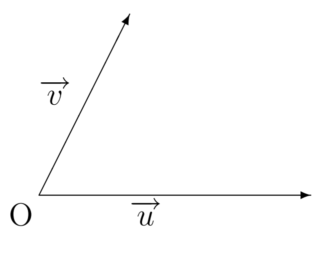
Data una sequenza di un certo numero di vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_m \in \mathcal{S}_0$ ed una sequenza dello stesso numero di scalari $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1\overrightarrow{v}_1 + r_2\overrightarrow{v}_2 + \cdots + r_m\overrightarrow{v}_m,$$

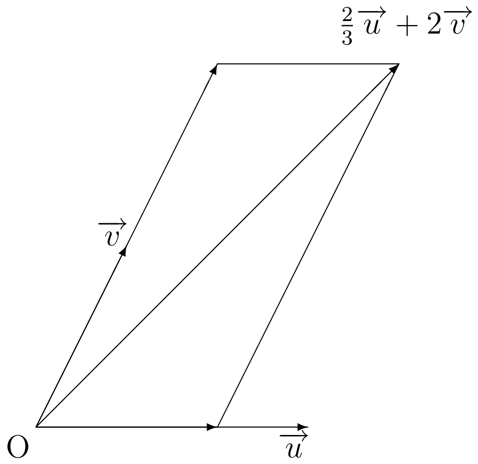
detto *combinazione lineare* dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto *coefficiente* del vettore $\overrightarrow{v}_i$ nella combinazione lineare.

Esempio

- La combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ applicati in O



con pesi rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore

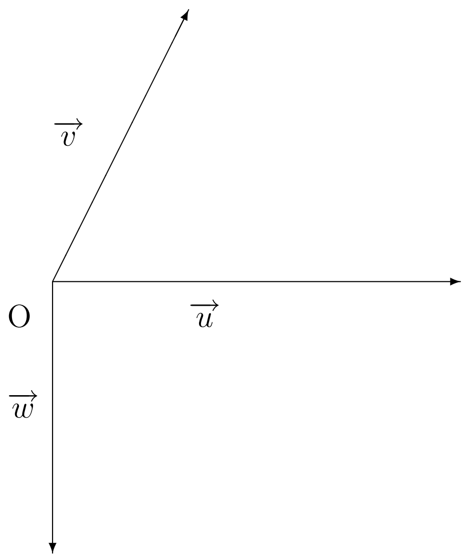


Ciascuna delle combinazioni lineari

$$r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}, \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

dei due vettori $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ da' per risultato un vettore del piano individuato da $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$. Viceversa, ogni vettore di questo piano si puo' ottenere come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.

Per esercizio si determini una stima dei coefficienti che permettono di ottenere il vettore $\overrightarrow{w}$ qui sotto riportato.



5. **Sottospazi.**

Ogni vettore $\overrightarrow{v} \in \mathcal{S}_0$ e' univocamente determinato dalla sua punta, e percio' spesso viene identificato con essa. Cosi', l'insieme dei vettori che giacciono su una una certa retta per O viene identificato con quella retta, e l'insieme dei vettori che giacciono su una una certo piano per O viene identificato con quel piano.

I *sottospazi* di $\mathcal{S}_0$ sono

- l'insieme che contiene solo l'origine O;
- ciascuna retta per O;
- ciascun piano per O;
- l'intero spazio.

Essendo questi sottospazi punti, rette, piani, e spazio, essi hanno rispaettivamente dimensione $0, 1, 2, 3$. Nei prossimi punti mostreremo come il concetto di dimensione possa essere descritto nei termini dell'algebra dei vettori.

6. **Dipendenza/Indipendenza lineare. Dimensione.**

Siano dati m vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m \in \mathcal{S}_0$, con $m > 1$. Si hanno due casi:

- c'e' un vettore $\overrightarrow{v}_i$ che e' combinazione lineare degli altri;
- nessun vettore $\overrightarrow{v}_i$ e' combinazione lineare degli altri.

Nel primo caso, diciamo che i vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_m$ sono *linearmente dipendenti*; nel secondo caso, diciamo che sono *linearmente indipendenti.*

Conviene completare questa definizione considerando anche il caso $m = 1$. Se un vettore e' uguale al vettore nullo diciamo che e' linearmente dipendente, se e' diverso dal vettore nullo, diciamo che e' linearmente indipendente.

Si ha che

> *la dimensione di un sottospazio e' uguale al massimo numero di suoi vettori linearmente indipendenti.*

Verifichiamo questa affermazione nel caso di un qualsiasi piano passante per O. Nel piano possiamo trovare vettori diversi dal vettore nullo, sia $\overrightarrow{v}_1$ uno di essi. Sia $\overrightarrow{v}$ un vettore del piano: se $\overrightarrow{v}$ sta sulla retta individuata da $\overrightarrow{v}_1$, allora $\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{v}_1$, per un opportuno scalare r, e i vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}$ sono linearmente dipendenti. Nel piano possiamo prendere un vettore $\overrightarrow{v}_2$ che non sta sulla retta individuata da $\overrightarrow{v}_1$; i vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Ora, ogni altro vettore $\overrightarrow{v}$ del piano e' combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$. Dunque il massimo numero di vettori del piano linearmente indipendenti e' 2.

Per esercizio, si motivi il fatto che il massimo numero di vettori dello spazio linearmente indipendenti e' 3.

Interpretazione geometrica delle operazioni su $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

1. Fissati nel piano un punto O, una prima retta per O con un punto privilegiato diverso da O, ed una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto privilegiato diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascuna coppia ordinata di numeri reali un punto del piano, in modo che alla coppia $(0,0)$ corrisponda l'origine O, alla coppia $(1,0)$ corrisponda il punto unita' della prima retta, e alla coppia $(0,1)$ corrisponda il punto unita' della seconda retta. Ciascun punto del piano si ottiene in corrispondenza di una ed una sola coppia (p,q) di numeri reali, che vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

   Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}^2$ e i punti del piano. Spesso identificheremo un punto del piano col vettore con origine in O e punta in quel punto.

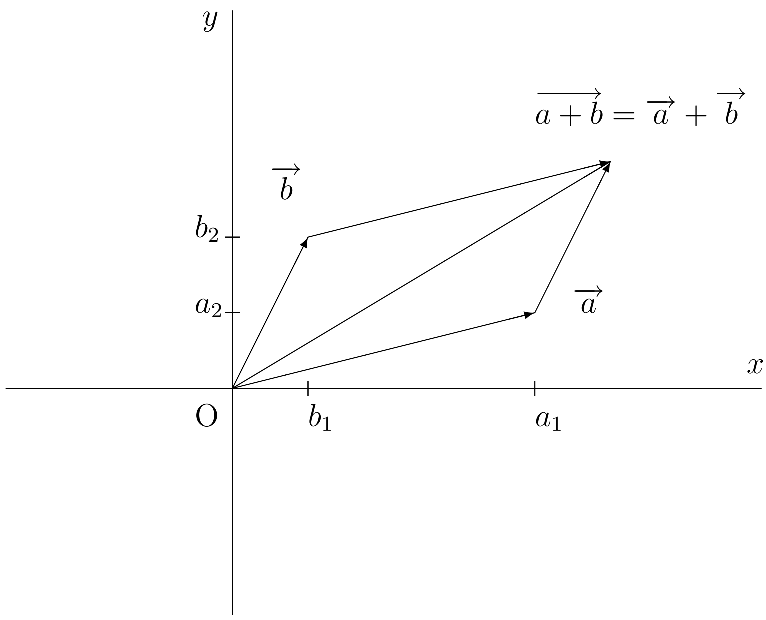
   L'addizione di coppie di numeri reali viene allora rappresentata dall'addizione dei vettori con origine in O. Precisamente, se alle due coppie

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

   corrispondono i vettori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, allora alla coppia somma

$$a + b = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix},$$

   corrisponde il vettore somma dei vettori $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$:



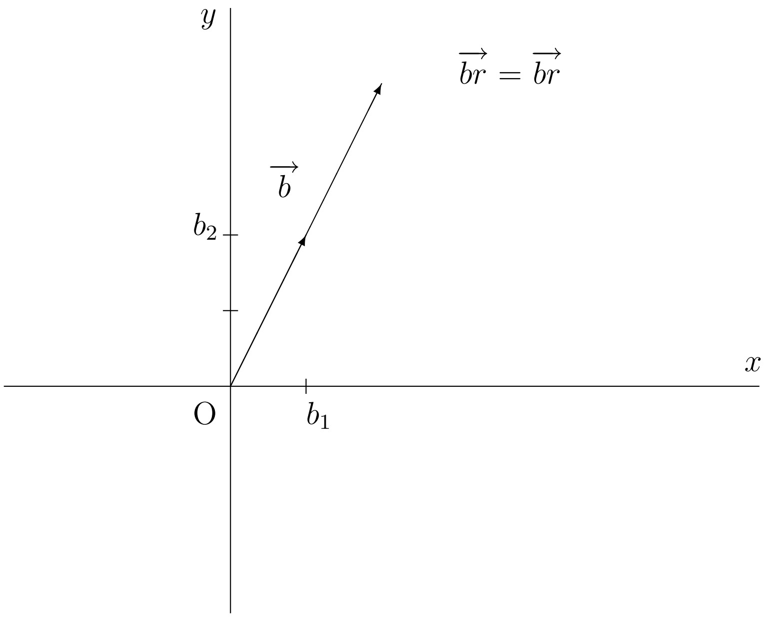
   La moltiplicazione di una coppia di numeri reali per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di un vettore con orignine in O un numero reale. Precisamente, se alla coppia

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

corrisponde il vettore $\overrightarrow{b}$, e se r e' uno scalare, allora alla coppia prodotto

$$br = \begin{bmatrix} b_1 r \\ b_2 r \end{bmatrix}$$

corrisponde il vettore prodotto di $\overrightarrow{b}$ per lo scalare r :



D'ora in poi identificheremo ciascuna coppia ordinata di numeri reali col corrispondente vettore con origine in O, ed useremo come simboli lettere minuscole semplici, come a al posto di $\overrightarrow{a}$.

2. Fissati nello spazio

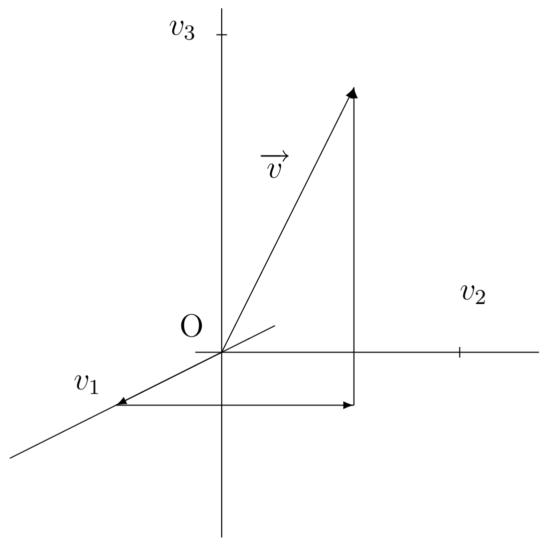
   > un punto O, una prima retta per O con un punto U_1 diverso da O, una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto U_2 diverso da O, ed una terza retta per O, ortogonale alle prime due, con un punto U_3 diverso da O,

   c'e' un modo naturale di associare a ciascuna terna ordinata di numeri reali un punto dello spazio, in modo che

   > alla terna $(0, 0, 0)$ corrisponda l'origine O, alla terna $(1, 0, 0)$ corrisponda il punto U_1, alla terna $(0, 1, 0)$ corrisponda il punto U_2, e alla terna $(0, 0, 1)$ corrisponda il punto U_3.

   Ciascun punto dello spazio si ottiene in corrispondenza di una ed una sola terna (p, q, r) di numeri reali, che vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

   Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}^3$ e i punti dello spazio. Spesso identificheremo un punto dello spazio col vettore con origine in O avente punta in quel punto. Alla generica terna $v = [v_i]_{i=1}^{3}$ corrisponde un vettore $\overrightarrow{v}$ che si puo' pensare come lo spostamento di v_1 unita' lungo il primo asse, di v_2 unita' lungo il secondo asse, di v_3 unita' lungo il terzo asse, applicato all'origine O.



L'addizione di terne di numeri reali viene allora rappresentata dall'addizione di vettori con origine in O. Precisamente, se alle due terne $a = [a_i]_{i=1}^3$, $b = [b_i]_{i=1}^3$, corrispondono i vettori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, allora alla terna somma $a + b = [a_i + b_i]_{i=1}^3$ corrisponde il vettore somma di $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{a+b} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} .$$

La moltiplicazione di una terna di numeri reali per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di un vettore con origine in O per un numero reale. Precisamente, se alla terna $b = [b_i]_{i=1}^3$ corrisponde il vettore $\overrightarrow{b}$, e se r e' uno scalare, allora alla terna prodotto $br = [b_i r]_{i=1}^3$ corrisponde il vettore prodotto di $\overrightarrow{b}$ per lo scalare r :

$$\overrightarrow{br} = \overrightarrow{b}\, r.$$

D'ora in poi identificheremo ciascuna terna ordinata di numeri reali col corrispondente vettore con origine in O, ed useremo come simboli lettere minuscole semplici, come a al posto di $\overrightarrow{a}$.

Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

1. Sia n un intero positivo fissato. Lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

munito dell'operazione di addizione di due $n-$ple, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

e dell'operazione di moltiplicazione di una $n-$pla per un numero reale, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} a_1 r \\ \vdots \\ a_n r \end{bmatrix}.$$

Penseremo ciascuna $n-$pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole $a, b, \ldots, v, \ldots$.

La n-pla $0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ viene detta *vettore nullo* di $\mathbb{R}^n$.

Al posto di $n-$pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di numero reale useremo il termine *scalare*.

Data una sequenza di un certo numero di vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_m r_m \in \mathbb{R}^n,$$

detto *combinazione lineare* dei vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

2. Dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

ci chiediamo se w e' o meno combinazione lineare di v_1 e v_2. Cio' significa chiedersi se l'equazione nelle incognite scalari x_1 e x_2

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 = w$$

ha soluzione o meno. Sostituendo a v_1, v_2, w i loro valori, si ha

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

cioe' il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 = 9 \end{cases}$$

Ora, questo sistema ha una ed una sola soluzione:

$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$

Dunque w e' combinazione lineare di v_1 e v_2, con coefficienti rispettivi -1 e 2 :

$$-v_1 + 2v_2 = w.$$

Si noti che in $\mathbb{R}^3$ la ricerca delle combinazione lineari di 2 vettori che risultano in un dato vettore si tradurra' sempre nella ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite.

3. Dati in $\mathbb{R}^n$ $m+1$ vettori

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \dots, m; \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ci chiediamo se b e' o meno combinazione lineare degli m vettori $a_1, \dots, a_m$. Cio' significa chiedersi se l'equazione nelle incognite scalari $x_1, \dots, x_m$

$$a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m = b$$

ha soluzione o meno. Sostituendo ad $a_1, \dots, a_m, b$ i loro valori, si ha

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} x_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

cioe' il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}.$$

Dunque in $\mathbb{R}^n$ la ricerca delle combinazione lineari di m vettori che risultano in un dato vettore si tradurra' sempre nella ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di n equazioni in m incognite.

Si noti che la rappresentazione matriciale del sistema e'

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

e in forma compatta

$$Ax = b,$$

dove

$$A = \left[\ a_1 \mid \dots \mid a_m \ \right].$$

4. **Dipendenza/Indipendenza lineare.**

   Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, siano dati m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$, con $m > 1$. Si hanno due casi:

   - c'e' un vettore v_i che e' combinazione lineare degli altri;
   - nessun vettore v_i e' combinazione lineare degli altri.

   Nel primo caso, diciamo che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono *linearmente dipendenti*; nel secondo caso, diciamo che sono *linearmente indipendenti*.

   Conviene completare questa definizione considerando anche il caso $m = 1$. Se un vettore e' uguale al vettore nullo diciamo che e' linearmente dipendente, se e' diverso dal vettore nullo, diciamo che e' linearmente indipendente.

5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, consideriamo i vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Ci chiediamo se e_1 e' o meno combinazione lineare di $e_2, \ldots, e_n$. Osserviamo che la prima componente di ciascuno dei vettori $e_2, \ldots, e_n$ e' 0, e dunque anche ogni combinazione lineare di questi vettori avra' prima componente 0; d'altro canto, la prima componente di e_1 e' 1. Dunque e_1 non e' combinazione lineare di $e_2, \ldots, e_n$.

   In modo analogo si prova che e_i non e' combinazione lineare dei vettori $e_1, \ldots, e_{i-1}$, $e_{i+1}, \ldots, e_n$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

   Dunque i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti.

   Si noti che nella rappresentazione di $\mathbb{R}^3$ nello spazio secondo un dato sistema di riferimento, i vettori e_1, e_2, e_3 sono rappresentati dai vettori con punta nei punti unita' dei tre assi.