Matematica II 09.12.09

1. **Sottospazi di $\mathbb{R}^n$.**

   Definizione 1. *Un sottinsieme V dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si dice sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se soddisfa le seguenti condizioni:*

   - $0_n \in V$;
   - *per ogni $u, v \in V$, si ha $u + v \in V$;*
   - *per ogni $u \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, si ha $ur \in V$.*

   In $\mathbb{R}^n$, il piu' grande sottospazio e' l'insieme $\mathbb{R}^n$ stesso, e il piu' piccolo sottospazio e' l'insieme $\{0_n\}$ ridotto al solo vettore nullo.

   Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, che possiamo identificare con lo spazio $\mathcal{S}_O$ costituito dai vettori dello spazio con origine in un punto O, si ha che il punto O, le rette passanti per O, i piani passanti per O, e l'intero spazio, sono sottospazi ai sensi della definizione data sopra.

   Consideriamo ad esempio il caso di un piano per O: dati due vettori sul piano, si ha che il parallelogramma costruito su questi vettori giace sul piano, dunque anche la sua diagonale uscente da O, che per definizione e' la somma dei due vettori, giace sul piano; dato un vettore sul piano e uno scalare, si ha che la retta individuata dal vettore giace sul piano, e dunque anche il prodotto del vettore per lo scalare giace sul piano.

   Si puo' provare che, viceversa, un sottinsieme di $\mathbb{R}^3$ che soddisfi la definizione data sopra e' necessariamente il punto O, oppure una retta passante per O, oppure un piano passante per O, oppure l'intero spazio.

2. **Sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato da un insieme di vettori.**

   Definizione 2. *Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vettori in $\mathbb{R}^n$. L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, v_2, \ldots, v_m$ viene detto spazio generato da $v_1, v_2, \ldots, v_m$, e viene indicato con* $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. *In simboli:*

   $$\mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} v_i r_i;\ r_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

   L'insieme $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti:

   - 0_n e' una combinazione lineare dei vettori v_i :

     $$0_n = \sum_{i=1}^{m} v_i 0;$$

- se $u = \sum_{i=1}^m v_i r_i$ e $v = \sum_{i=1}^m v_i s_i$ sono combinazioni lineari dei vettori v_i, allora anche
$$u + v = \sum_{i=1}^m v_i r_i + \sum_{i=1}^m v_i s_i = \sum_{i=1}^m v_i (r_i + s_i)$$
e' una combinazione lineari dei vettori v_i;
- se $u = \sum_{i=1}^m v_i r_i$ e' una combinazione lineare dei vettori v_i, ed $r \in \mathbb{R}$, allora anche
$$ur = \left(\sum_{i=1}^m v_i r_i \right) r = \sum_{i=1}^m v_i (r_i r)$$
e' una combinazione lineare dei vettori v_i.

Ciascun v_i appartiene allo spazio $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$; infatti

$v_1 = v_1 1 + v_2 0 + v_3 0 + \cdots v_m 0$

$v_2 = v_1 0 + v_2 1 + v_3 0 + \cdots v_m 0$

$\vdots$

In realta' $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e' il piu' piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che contiene l'insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Si ha che

> *ciascun sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si puo' rappresentare come spazio generato da un insieme di vettori.*

Nel caso dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, che possiamo identificare con lo spazio $\mathcal{S}_O$ costituito dai vettori dello spazio con origine in un punto O, si ha:

- ciascuna retta passante per O puo' essere rappresentata come lo spazio
$$\mathrm{span}\{v_1\}$$
generato da un vettore v_1 non nullo;
- ciascun piano passante per O puo' essere rappresentato come lo spazio
$$\mathrm{span}\{v_1, v_2\}$$
generato da due vettori v_1, v_2 non allineati;
- l'intero spazio puo' essere rappresentato come lo spazio
$$\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$
generato da tre vettori v_1, v_2, v_3 non complanari.

3. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo lo spazio

$$\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$$

generato dalle colonne $v_1, v_2, \ldots, v_5$ della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 9 & 14 \\ 1 & 8 & 9 & 27 & 36 \end{bmatrix}.$$

Il generico elemento di $\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ e' dato da

$$v_1 r_1 + v_2 r_2 + v_3 r_3 + v_4 r_4 + v_5 r_5$$

dove gli r_i variano in $\mathbb{R}$. Osservato che

$v_3 = v_1 + v_2$

$v_5 = v_1 + v_2 + v_4,$

possiamo riscrivere il generico elemento di $\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ come

$$\begin{aligned} & v_1 r_1 + v_2 r_2 + (v_1 + v_2) r_3 + v_4 r_4 + (v_1 + v_2 + v_4) r_5 = \\ & \qquad = v_1(r_1 + r_3 + r_5) + v_2(r_2 + r_3 + r_5) + v_4(r_4 + r_5). \end{aligned}$$

Dunque abbiamo che

$$\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_5\} \subseteq \text{span}\{v_1, v_2, v_4\}$$

In realta' vale l'uguale.

4. **Dipendenza/indipendenza lineare**

Il linea di principio, decidere se un insieme di vettori e' linearmente dipendente o linearmente indipendente e' piuttosto laborioso. Ad esempio, dati tre vettori $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$, bisogna procedere come segue:

> ci si chiede se v_1 e' combinazione lineare di v_2 e v_3, cioe' se esistono due scalari r, s tali che
>
> $$v_1 = v_2 r + v_3 s;$$
>
> in caso affermativo, si puo' dire che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti; altrimenti ci si chiede se v_2 e' combinazione lineare di v_1 e v_3, cioe' se esistono due scalari r, s tali che
>
> $$v_2 = v_1 r + v_3 s;$$
>
> in caso affermativo, si puo' dire che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti; altrimenti ci si chiede se v_3 e' combinazione lineare di v_1 e v_2, cioe' se esistono due scalari r, s tali che
>
> $$v_3 = v_1 r + v_2 s;$$
>
> in caso affermativo, v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, altrimenti sono linearmente indipendenti.

Si osservi che le tre relazioni prese in esame si possono riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 r - v_3 s &= 0_n \\ -v_1 r + v_2 - v_3 s &= 0_n \\ -v_1 r - v_2 s + v_3 &= 0_n; \end{aligned}$$

cio' suggerisce di considerare le combinazioni lineari

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

dei vettori v_1, v_2, v_3 il cui risultato e' il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1. *Siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Se esistono degli scalari $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che*

$$v_1 r_1 + \cdots + v_m r_m = 0_n,$$

allora i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti; se l'uguaglianza

$$v_1 x_1 + \cdots + v_m x_m = 0_n, \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

vale solo per $x_1 = \cdots = x_m = 0$, allora i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

Dim. Dimostriamo la prima affermazione. Supponiamo, per semplicita', che l'uguaglianza

$$v_1 r_1 + \cdots + v_m r_m = 0_n$$

valga per certi scalari $r_1, \ldots, r_m$, con $r_1 \neq 0$. Possiamo scrivere l'uguaglianza nella forma

$$v_1 r_1 = -v_2 r_2 - \cdots - v_m r_m,$$

e, essendo $r_1 \neq 0$, possiamo ricavare v_1 come combinazione lineare

$$v_1 = -v_2 \frac{r_2}{r_1} - \cdots - v_m \frac{r_m}{r_1},$$

di $v_2, \ldots, v_m$; cio' significa che i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti.

5. **Esempio**

Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{bmatrix},$$

e ci chiediamo se sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Consideriamo l'equazione

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0_4,$$

nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3.

Questa equazione equivale al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 0 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 &= 0 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3 che ha matrice completa

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 0 \end{array}\right]$$

Applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss, si trova la matrice a scala per righe

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

cui corrisponde il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases},$$

che ha solo la soluzione banale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Dunque l'equazione

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0_4$$

e' soddisfatta solo per $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, e i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

In generale, si ha:

I vettori

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e e solo se il sistema lineare omogeneo di n equazioni in m incognite

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione banale $x_j = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, m$.

6. **Dimensione.**

Definizione 3. *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Il massimo numero di vettori di V linearmente indipendenti viene detto dimensione di V, e viene indicato con*

$$\dim(V).$$

Si noti che $\dim(\{0_n\}) = 0$.

Proposizione 2. *Siano $a_1, \ldots, a_m$ vettori di $\mathbb{R}^n$.*

Per $m > n$, allora i vettori $a_1, \ldots, a_m$ sono linearmente dipendenti.

Per $m = n$, i vettori $a_1, \ldots, a_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice quadrata di ordine n

$$\left[\ a_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, a_m\ \right]$$

e' non singolare. Dunque $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Dim. I vettori $a_1, \ldots, a_m$ sono linearmente indipendenti e solo se il sistema lineare omogeneo di n equazioni in m incognite

$$\left[\ a_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, a_m\ \right] x = 0_n$$

ha solo la soluzione banale $x = 0_m$. Ora: per $m > n$, questo sistema e' indeterminato e dunque possiede soluzioni non banali; per $m = n$, questo sistema possiede solo la soluzione banale $x = 0_m$ se e solo se la matrice quadrata $\left[\ a_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, a_m\ \right]$ e' non singolare. Ora, essendoci matrici quadrate di ordine n non singolari ("in generale" una matrice quadrata e' non singolare), ci sono anche sequenze di n vettori $a_1, \ldots, a_n$ di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti. Dunque il massimo numero di vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti e' n.

Per i sottospazi vale un risultato analogo:

Proposizione 3. *Se gli m vettori $a_1, \ldots, a_m$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti ($m \leq n$), allora la dimensione dello spazio* $\mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_m\}$ *e' m.*

Osserviamo che lo spazio $\mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_m\}$ contiene gli m vettori linearmente indipendenti $a_1, \ldots, a_m$, e dunque la sua dimensione e' maggiore o uguale ad m. La parte non banale dell'enunciato consiste dunque nell'affermare che una sequenza $b_1, \ldots, b_p$ di $p > m$ vettori nello spazio $\mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_m\}$ e' sempre linearmente dipendente. Non diamo la dimostrazione di questa proposizione.

7. **Basi**

Proposizione 4. *Sia V un sottospazio di dimensione m di $\mathbb{R}^n$, e siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ m vettori di V linearmente indipendenti. Allora ogni vettore v di V si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

$$v = v_1 r_1 + v_2 r_2 + \cdots + v_m r_m, \qquad r_i \in \mathbb{R}$$

dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Non diamo la dimostrazione di questa proposizione.

Ciascuna sequenza di vettori di un sottospazio costituita da un numero di vettori pari alla dimensione del sottospazio si dice *base* del sottospazio. Gli scalari che compaiono nella scrittura di un vettore del sottospazio come combinazione lineare dei vettori di una base del sottospazio si dicono *coordinate* del vettore rispetto a quella base.

Per la Prop.2, una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si puo' ottenere prendendo le colonne di una matrice non singolare di ordine n, e tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ si possono ottenere in questo modo. In particolare, le colonne della matrice unita' di ordine n

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$, detta *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

Per ogni vettore a di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} a_2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_n = e_1 a_1 + e_2 a_2 + \cdots + e_n a_n.$$

Dunque le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base cononica di $\mathbb{R}^n$ sono le componenti del vettore.