

Matematica II - 11.12.09

Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

1. Consideriamo l'equazione lineare omogenea

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 .

Possiamo risolvere l'equazione ricavando l'incognita x_1

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3$$

in funzione delle incognite x_2, x_3 e ponendo queste uguali a due parametri r_1, r_2 .
Le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2r_1 - 3r_2 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_2, \end{aligned}$$

dove r_1, r_2 variano in \mathbb{R} . Possiamo dire che le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole le combinazioni lineari dei due vettori

$$u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che sono linearmente indipendenti. Dunque l'insieme delle soluzioni e' il piano per O generato dai vettori u, v .

In generale si ha: se $[a_1 \ a_2 \ a_3] \neq [0 \ 0 \ 0]$, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

nelle 3 incognite x_1, x_2, x_3 e' un piano passante per O, cioe' un sottospazio di dimensione 2.

2. Consideriamo il sistema di due equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 . Passando alla matrice associata, applicando alla matrice l'algoritmo di Gauss-Jordan, e passando al sistema associato, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Possiamo risolvere questo sistema ricavando le incognite x_1, x_2

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = -x_3,$$

in funzione dell'incognita x_3 e ponendo questa uguale a un parametro r . Le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ -r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

dove r varia in \mathbb{R} . Possiamo dire che le soluzioni dell'equazione data sono tutti e soli multipli scalari del vettore

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che e' diverso dal vettore nullo. Dunque l'insieme delle soluzioni e' la retta per O generata dal vettore u .

In generale si ha: se i vettori $[a_1 \ a_2 \ a_3]$ e $[b_1 \ b_2 \ b_3]$ sono non nulli e non proporzionali, allora l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di due equazioni

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 e' una retta passante per O, cioe' un sottospazio di dimensione 1.

3. In generale si ha: se i vettori $[a_1 \ a_2 \ a_3]$, $[b_1 \ b_2 \ b_3]$, $[c_1 \ c_2 \ c_3]$ sono linearmente indipendenti, allora l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di tre equazioni

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases}$$

nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 e' ridotto alla sola origine O, cioe' un sottospazio di dimensione 0.

4. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo

Teorema 1. *Sia dato il sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite*

$$\begin{cases} a'_1x = 0 \\ a'_2x = 0 \\ \vdots \\ a'_mx = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

dove $a'_1, a'_2, \dots, a'_m \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. L'insieme V delle soluzioni del sistema e' un sottospazio di \mathbb{R}^n . Se a'_1, a'_2, \dots, a'_m sono linearmente indipendenti, allora

$$\dim(V) = n - m.$$

Verifichiamo solo che l'insieme V delle soluzioni e' un sottospazio. E' chiaro che all'insieme V appartiene il vettore nullo $0_n \in \mathbb{R}^n$. Dati $u, v \in V$, proviamo che $u + v \in V$; ora $u, v \in V$ significa che

$$\begin{aligned} a'_i u &= 0 & i = 1, 2, \dots, m \\ a'_i v &= 0 & i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

da cui segue

$$a'_i(u + v) = a'_i u + a'_i v = 0 + 0 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

che significa $u + v \in V$. In modo analogo si prova che se $u \in V$ e $r \in \mathbb{R}$, allora $ur \in V$.

Ortogonalita' nel piano e nello spazio

1. Ortogonalita' nel piano.

Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli del piano. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Considereremo sempre vettori applicati in uno stesso punto O ; dati due vettori v, w , scriveremo

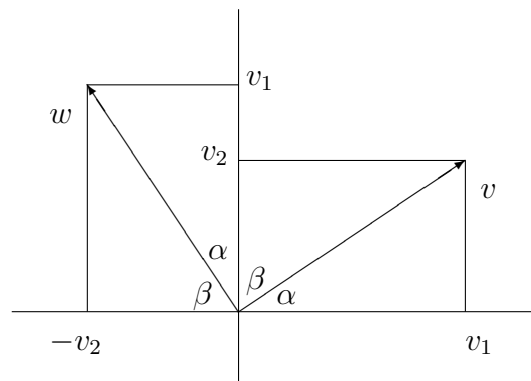
$$v \perp w$$

per indicare che v e w sono ortogonali.

Osserviamo che i vettori applicati in O ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono una retta.

Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O , identifichiamo i vettori di \mathbb{R}^2 con vettori applicati in O .

Dato un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ci sono un paio di scelte psicologicamente naturali per un vettore ortogonale a v , una delle quali e' $w = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$.



La scelta e' corretta. Informalmente, si puo' osservare che si vengono a formare quattro triangoli rettangoli uguali, l'angolo formato dai vettori v e w e' $\alpha + \beta$, ma $\alpha + \beta$ e' anche l'angolo formato dai due assi coordinati, che e' retto.

I vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo

$$wr = \begin{bmatrix} -v_2r \\ v_1r \end{bmatrix},$$

dove r e' uno scalare qualsiasi.

Osserviamo che la somma dei prodotti delle componenti del vettore v per le corrispondenti componenti del vettore wr e' sempre nulla:

$$v_1 \cdot (-v_2r) + v_2 \cdot (v_1r) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di \mathbb{R}^2 , si ha che

$$a \perp b \quad \text{se e solo se} \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

Ora,

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a^T b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque che

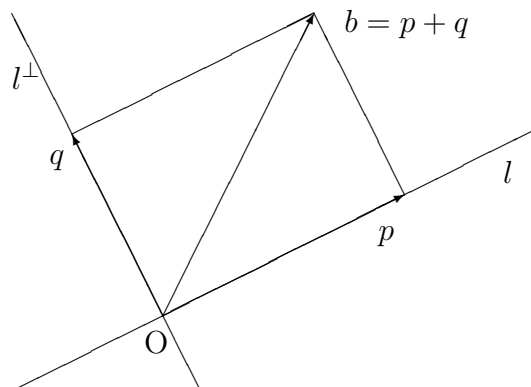
$$a \perp b \quad \text{se e solo se} \quad a^T b = 0.$$

2. Proiezione ortogonale di un vettore su una retta, nel piano.

Siano dati nel piano un punto O e una retta l per O , e sia l^\perp la retta per O perpendicolare ad l . Ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma

$$b = p + q$$

di due vettori applicati in O , un vettore p sulla retta l ed un vettore q sulla retta l^\perp . Diciamo che p e' la *proiezione ortogonale* di b su l , e che q e' la *proiezione ortogonale* di b su l^\perp .



Vediamo ora come questa costruzione si possa effettuare algebricamente. Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine nel punto O , ed identifichiamo i vettori di \mathbb{R}^2 con vettori applicati in O . Possiamo allora descrivere la retta l come l'insieme dei vettori multipli scalari di un vettore non nullo a :

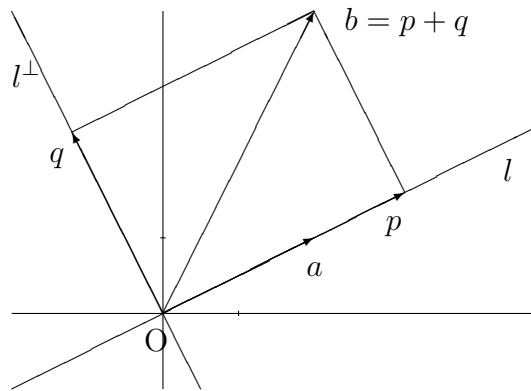
$$l = \{ar; r \in \mathbb{R}\},$$

e la retta l^\perp come l'insieme dei vettori ortogonali al vettore a :

$$l^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^T x = 0\}.$$

Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$



Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= ar, \quad r \in \mathbb{R} \\ a^T q &= 0, \end{aligned}$$

dove r è uno scalare incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per a^T entrambe i membri si ha

$$a^T b = a^T (ar + q) = a^T ar + a^T q = a^T ar,$$

cioè

$$a^T a r = a^T b.$$

Ora, questa è un'equazione lineare nell'incognita r , e il coefficiente $a^T a$ è diverso da 0 in quanto a è diverso dal vettore nullo. Si ha così una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{a^T b}{a^T a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = ar = a \frac{a^T b}{a^T a}.$$

Lo scalare $(a^T b) / (a^T a)$ viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto al vettore a .

Nel nostro caso, si ha

$$r = \frac{a^T b}{a^T a} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{8}{5},$$

da cui

$$p = ar = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{8}{5} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$
$$q = b - p = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 2.4 \end{bmatrix}.$$

3. Ortogonalita', nello spazio

Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli dello spazio. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Considereremo sempre vettori applicati in uno stesso punto O ; dati due tali vettori v, w , scriveremo

$$v \perp w$$

per indicare che v e w sono ortogonali.

Osserviamo che i vettori applicati in O ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono un piano, e che i vettori applicati in O ortogonali a due dati vettori v, w linearmente indipendenti descrivono una retta.

Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O , identifichiamo i vettori di \mathbb{R}^3 con vettori applicati in O .

Fatto

Si puo' provare che due vettori $a = [a_i]_{i=1}^3$ e $b = [b_i]_{i=1}^3$ sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Ora,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a^T b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque ancora che

$$a \perp b \quad \text{se e solo se} \quad a^T b = 0.$$

Noi sappiamo che, per costruzione, i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di \mathbb{R}^3 sono a due a due ortogonali. Cio' si ritrova anche algebricamente, in quanto

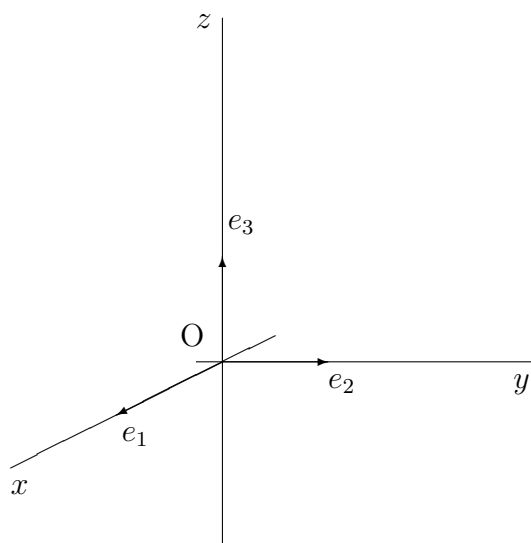
$$e_1^T e_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$e_1^T e_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$e_2^T e_3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Possiamo anche ritrovare che i vettori che stanno sul piano xy sono ortogonali ai vettori che stanno sull'asse z . Infatti, i primi sono del tipo $a = [a_i]_{i=1}^3$ con $a_3 = 0$, i secondi sono del tipo $b = [b_i]_{i=1}^3$ con $b_1 = b_2 = 0$, e si ha

$$a^T b = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + 0 \cdot b_3 = 0.$$

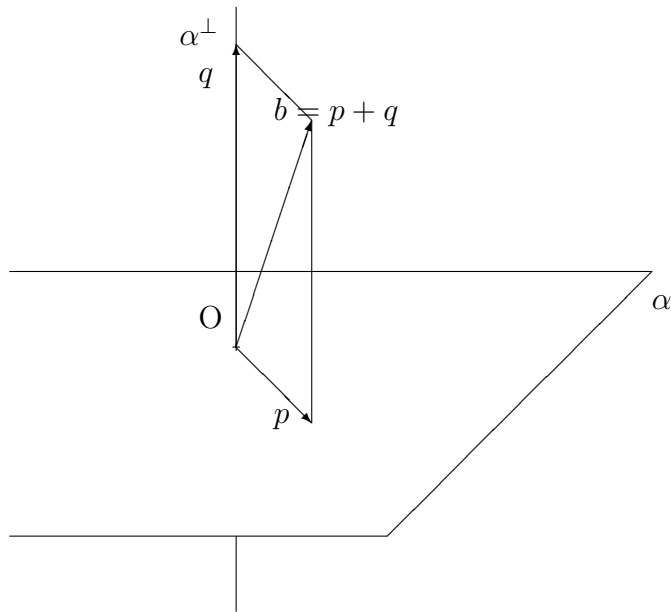


4. **Proiezione ortogonale di un vettore su un piano, nello spazio.**

Siano dati nello spazio un punto O e un piano α per O , e sia α^\perp la retta per O perpendicolare ad α . Ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma

$$b = p + q$$

di due vettori applicati in O , un vettore p sul piano α ed un vettore q sulla retta α^\perp . Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b sul piano α , e che q e' la proiezione ortogonale di b sulla retta α^\perp .

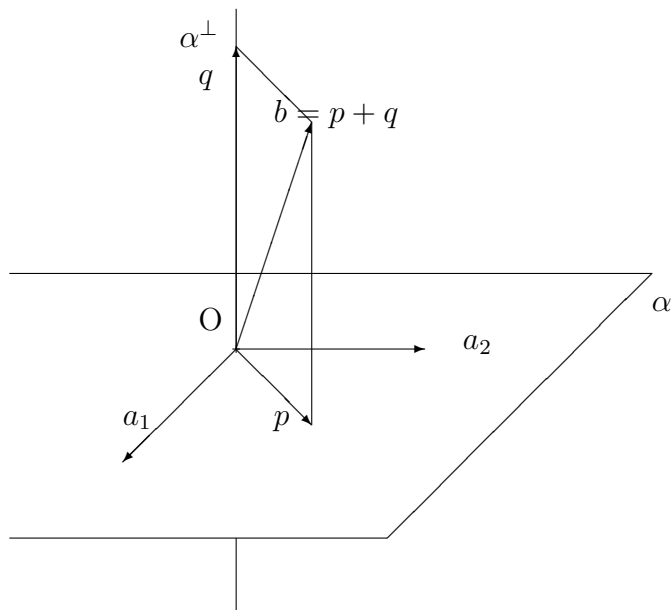


Vediamo ora come questa costruzione si possa effettuare algebricamente. Fissiamo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine nel punto O , ed identifichiamo i vettori di \mathbb{R}^3 con vettori applicati in O . Possiamo allora descrivere il piano α come l'insieme dei vettori combinazioni lineari di due vettori linearmente indipendenti a_1, a_2 :

$$\alpha = \{a_1 r_1 + a_2 r_2; r_1, r_2 \in \mathbb{R}\},$$

e la retta α^\perp come l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori a_1, a_2 :

$$\alpha^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : a_1^T x = 0, a_2^T x = 0\}.$$



Prima di procedere, conviene rappresentare il piano α e la retta α^\perp in un modo piu' sintetico. Osserviamo che le combinazioni lineari $a_1 r_1 + a_2 r_2$ dei vettori a_1 e a_2 si possono scrivere nella forma

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = \left[a_1 \mid a_2 \right] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix},$$

e che le condizioni di ortogonalita' $a_1^T x = 0$, $a_2^T x = 0$ ai vettori a_1, a_2 si possono riscrivere nella forma

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Percio', posto $A = \left[a_1 \mid a_2 \right]$, ed osservato che $\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} = \left[a_1 \mid a_2 \right]^T = A^T$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \alpha &= \{Ar; r \in \mathbb{R}^2\}, \\ \alpha^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 : A^T x = 0_2\}. \end{aligned}$$

Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= Ar, \quad r \in \mathbb{R}^2 \\ A^T q &= 0, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^2$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A^T entrambe i membri si ha

$$A^T b = A^T (Ar + q) = A^T Ar + A^T q = A^T Ar,$$

cioe'

$$A^T A r = A^T b.$$

Ora, la matrice quadrata $A^T A$ e' non singolare in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti (vedremo in seguito perche'). Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = (A^T A)^{-1} A^T b,$$

dalla quale si ottiene

$$p = Ar = A (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Nel nostro caso, si ha

$$\begin{aligned} r &= (A^T A)^{-1} A^T b = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$p = Ar = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{1}{9} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix} \frac{1}{9},$$

e

$$q = b - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix} \frac{1}{9} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} \frac{1}{9}.$$