

Matematica II 15.12.09

Ortogonalita' e proiezioni ortogonali, in \mathbb{R}^n .

1. Prodotto interno

Dati due vettori $u = [u_i]_1^n$ e $v = [v_i]_1^n$ di \mathbb{R}^n , possiamo considerare il numero reale dato da

$$u'v = [u_1 \quad \dots \quad u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_1^n u_i v_i;$$

questo numero reale viene detto *prodotto interno* del vettore u per il vettore v . Osserviamo che scambiando i fattori il prodotto interno non cambia:

$$v'u = \sum_1^n v_i u_i = \sum_1^n u_i v_i = u'v;$$

perciò potremo dire "prodotto interno fra u e v ," ed usare indifferentemente la forma $u'v$ o la forma $v'u$.

Dalle proprietà delle operazioni nell'algebra delle matrici, discendono le seguenti proprietà del prodotto interno:

$$\begin{aligned} (u+v)'w &= u'w + v'w \\ (ur)'w &= r(u'w) \\ u'(v+w) &= u'v + u'w \\ u'(wr) &= (u'w)r, \end{aligned}$$

per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$.

A parole, il prodotto interno di due vettori è la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei due vettori. Osserviamo che il prodotto interno di un vettore con se stesso è la somma dei quadrati delle sue componenti:

$$u'u = \sum_1^n u_i^2,$$

dunque esso è sempre maggiore-uguale a zero, ed è zero se e solo se tutte le componenti sono nulle, cioè il vettore è il vettore nullo:

$$\begin{aligned} u'u &\geq 0, & \forall u \in \mathbb{R}^n \\ u'u &= 0, & \Leftrightarrow u = 0_n \end{aligned}$$

In altri termini, la seconda affermazione si può seprimere così: $u \neq 0_n$ se e solo se $u'u \neq 0$. Più in generale, si ha che una matrice A ha colonne linearmente

indipendenti se e solo se la matrice quadrata $A^T A$ e' non singolare (vedremo in seguito perche').

Per ciascun vettore non nullo $u = [u_i]_1^n$ e ciascun vettore $v = [v_i]_1^n$, il numero reale dato dal rapporto fra il prodotto interno $u'v$ di u e v e il prodotto interno $u'u$ di u con se' stesso viene detto *coefficiente di Fourier di v rispetto ad u* , e viene indicato con $cf(v, u)$. Cosi' si ha

$$cf(v, u) = \frac{u'v}{u'u} = \frac{\sum_1^n u_i v_i}{\sum_1^n u_i^2}.$$

Per ciascuna matrice A di tipo $n \times m$ con colonne linearmente indipendenti, e per ciascuna matrice B di tipo $n \times p$, la matrice data dalla divisione a sinistra del prodotto $A^T B$ per il prodotto $A^T A$ viene detta *coefficiente di Fourier della matrice B rispetto alla matrice A* , e viene indicata con $cf(B, A)$. Cosi' si ha

$$cf(B, A) = (A^T A)^{-1} A^T B.$$

2. Ortogonalita'; complemento ortogonale di un sottospazio

Se il prodotto interno fra due vettori u e v di \mathbb{R}^n e' zero, diciamo che il vettore u e' *ortogonale* al vettore v , e scriviamo $u \perp v$; in simboli, poniamo

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad u'v = 0.$$

Dalle proprieta' del prodotto interno segue che la relazione di ortogonalita' e' simmetrica:

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad v \perp u,$$

e segue che il vettore nullo e' l'unico vettore di \mathbb{R}^n ortogonale a se' stesso:

$$u \perp u \quad \Leftrightarrow \quad u = 0_n.$$

Sia V un sottospazio di \mathbb{R}^n . L'insieme dei vettori di \mathbb{R}^n ortogonali a ciascun vettore di V e' detto *complemento ortogonale* di V , e viene indicato con V^\perp ; in simboli:

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : v'x = 0, \forall v \in V\}.$$

Il complemento ortogonale V^\perp di V e' a sua volta un sottospazio di V :

- $0_n \in V^\perp$, in quanto $v'0_n = 0, \forall v \in V$;
- se $x, y \in V^\perp$, allora anche $x + y \in V^\perp$. Infatti, $x, y \in V^\perp$ significa che $v'x = v'y = 0, \forall v \in V$; cio' implica

$$v'(x + y) = v'x + v'y = 0 + 0 = 0, \quad \forall v \in V,$$

che a sua volta significa che $x + y \in V^\perp$.

- se $x \in V^\perp$, e $r \in \mathbb{R}$, allora anche $xr \in V^\perp$. Infatti, $x \in V^\perp$ significa che $v'x = 0, \forall v \in V$; cio' implica

$$v'(xr) = (v'x)r = 0r = 0, \quad \forall v \in V,$$

che a sua volta significa che $xr \in V^\perp$.

Possiamo pensare che il sottospazio V sia il sottospazio $V = \text{span}\{a_1, \dots, a_m\}$ generato da un certo insieme di vettori $a_i \in \mathbb{R}^n$. Osserviamo che

un vettore e' è ortogonale a tutti i vettori $v \in V$ se e solo se esso è ortogonale a tutti i vettori a_i , per $i = 1, \dots, m$.

Cio' si puo' verificare come segue. Se x e' un vettore di \mathbb{R}^n tale che $v'x = 0$ per ogni v in V , allora in particolare per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha

$$a_i'x = 0.$$

D'altro canto, se y e' un vettore di \mathbb{R}^n tale che $a_i'y = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$, allora per ogni combinazione lineare $v = a_1r_1 + \dots + a_mr_m$ dei vettori a_i si ha

$$\begin{aligned} v'y &= (a_1r_1 + \dots + a_mr_m)'y \\ &= r_1(a_1'y) + \dots + r_m(a_m'y) \\ &= r_1 \cdot 0 + \dots + r_m \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dunque, si ha

$$\begin{aligned} V &= \{a_1r_1 + \dots + a_mr_m; r_i \in \mathbb{R}\} \\ V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_i'x = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Piu' sinteticamente, posto $A = [a_1 \mid \dots \mid a_m]$, cosi' che $\begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = A^T$, si ha

$$\begin{aligned} V &= \{Ar; r \in \mathbb{R}^m\} \\ V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n : A^T x = 0_m\}. \end{aligned}$$

3. Proiezione ortogonale

Sia V un sottospazio dello spazio vettoriale \mathbb{R}^n , e sia V^\perp il suo complemento ortogonale. Si puo' dimostrare che ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma

$$b = p + q$$

di un vettore $p \in V$ e di un vettore $q \in V^\perp$. Il vettore p si dice *proiezione ortogonale* di b su V , e il vettore q si dice *proiezione ortogonale* di b su V^\perp .

La proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio si puo' determinare nel modo seguente.

Possiamo pensare che il sottospazio V sia il sottospazio $V = \text{span}\{a_1, \dots, a_m\}$ generato da un certo insieme di vettori $a_i \in \mathbb{R}^n$ e che questi vettori siano linearmente indipendenti.

Dunque, posto $A = [a_1 \mid \dots \mid a_m]$, possiamo rappresentare V e V^\perp nella forma

$$\begin{aligned} V &= \{Ar; r \in \mathbb{R}^m\}, \\ V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n : A^T x = 0_m\}. \end{aligned}$$

Dato $b \in \mathbb{R}^n$, vogliamo determinare due vettori p, q che soddisfino le condizioni

$$\begin{aligned} b &= p + q \\ p &= Ar, \quad r \in \mathbb{R}^m \\ A^T q &= 0_m, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^m$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A^T entrambe i membri si ha

$$A^T b = A^T(Ar + q) = A^T Ar + A^T q = A^T Ar,$$

cioe'

$$A^T A r = A^T b.$$

Ora, la matrice quadrata $A^T A$ e' non singolare in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti (vedremo in seguito perche'), e si ha una ed una sola soluzione:

$$r = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Osserviamo che la colonna r e' il coefficiente di Fourier del vettore b rispetto alla matrice A :

$$r = cf(b, A).$$

Infine, abbiamo che il vettore p proiezione ortogonale del vettore b sullo spazio generato dalle colonne della matrice A e' dato da

$$p = Ar = A (A^T A)^{-1} A^T b.$$

4. Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio generato da un vettore $a \in \mathbb{R}^n$, diverso da 0_n . Così'

$$V = \{ar; r \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r; r \in \mathbb{R} \right\},$$

e

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : a'x = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}.$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} p &= \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r, \\ a_1 q_1 + \cdots + a_n q_n &= 0. \end{aligned}$$

Lo scalare r e' dato dal coefficiente di Fourier di b rispetto ad a :

$$r = \frac{a'b}{a'a} = \frac{a_1b_1 + \dots + a_nb_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

In particolare, per $a = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ si ha che

ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} r,$$

$$q_1 + \dots + q_n = 0.$$

Lo scalare r e' dato da

$$r = \frac{a'b}{a'a} = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

Si noti che $r = \mu_b$, la media delle componenti di b .

La scomposizione del vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e' dunque

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \mu_b \\ \vdots \\ b_n - \mu_b \end{bmatrix}.$$

5. Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio generato da due vettori $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$, linearmente indipendenti. Così'

$$V = \{a_1r_1 + a_2r_2; r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{[a_1 \mid a_2] r; r \in \mathbb{R}^2\},$$

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1'x = a_2'x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} x = 0_2\}.$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = a_1r_1 + a_2r_2$$

$$\begin{cases} a_1'q = 0 \\ a_2'q = 0 \end{cases}.$$

La colonna r e' data da

$$r = \left(\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} [a_1 \mid a_2] \right)^{-1} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} a'_1 a_1 & a'_1 a_2 \\ a'_2 a_1 & a'_2 a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a'_1 b \\ a'_2 b \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che, se i due vettori a_1 e a_2 sono ortogonali, allora si ha

$$r = \begin{bmatrix} a'_1 a_1 & 0 \\ 0 & a'_2 a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a'_1 b \\ a'_2 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a'_1 a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a'_2 a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 b \\ a'_2 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a'_1 b}{a'_1 a_1} \\ \frac{a'_2 b}{a'_2 a_2} \end{bmatrix}.$$

Dunque il vettore p proiezione ortogonale di b sullo spazio generato dai vettori a_1 e a_2 e' dato da

$$p = a_1 \frac{a'_1 b}{a'_1 a_1} + a_2 \frac{a'_2 b}{a'_2 a_2}$$

cioe' e' la combinazione lineare di a_1 e a_2 con coefficienti i coefficienti di Fourier di b rispetto ad a_1 e a_2 .

6. Con riferimento al punto precedente, nel caso in cui

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

la proiezione ortogonale di b su V e' data da

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{3}{3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{-1}{3} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \frac{1}{3}.$$

La proiezione ortogonale di b su V^\perp e' data da

$$q = b - p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}.$$