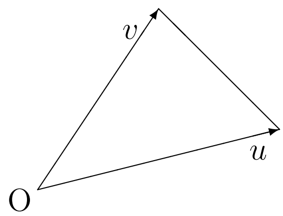
Matematica II 18.12.09

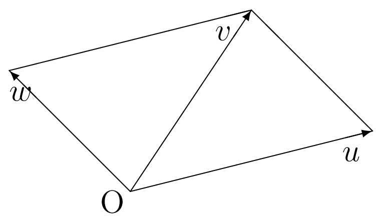
1. **Distanza**

   Supponiamo di avere fissato nel piano un punto O e una unita' di misura per le lunghezze. Dati due vettori u, v con origine in O, col termine "distanza fra u e v" intendiamo e col simbolo $d(u, v)$ indichiamo la lunghezza, nella unita' di misura fissata, del segmento che unisce gli estremi finali di u e v.

   Ora, il segmento che unisce gli estremi finali di u e v ha la stessa lunghezza del vettore w tale che $u + w = v$ cioe' del vettore $w = v - u$. Cosi' si ha

   $$d(u, v) = \|v - u\|.$$

   Il fatto che $d(u, v) = d(v, u)$ si riflette nel fatto che $\|v - u\| = \|u - v\|$.

   Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, ed identificati i vettori di $\mathbb{R}^2$ con i vettori del piano con origine in O, si ha dunque che la distanza fra i vettori $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, e' data da

   $$d(u, v) = \| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{bmatrix} \| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}.$$

   Analoghe considerazioni valgono per vettori nello spazio.

   Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, usiamo il termine "distanza fra due vettori u e v" ed usiamo il simbolo $d(u, v)$ per indicare la norma del vettore differenza $v - u$:

   $$d(u, v) = \|v - u\|.$$

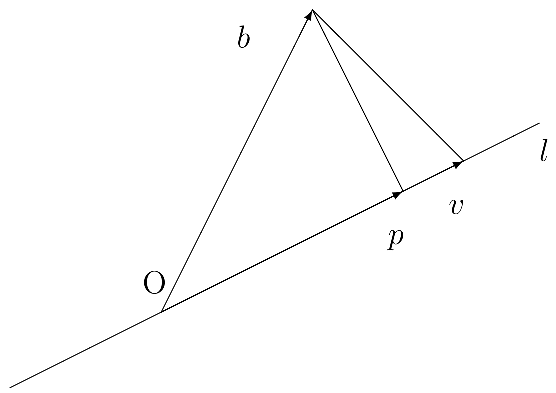
Posto $u = [u_i]_1^n$ e $v = [v_i]_1^n$, si ha dunque

$$d(u, v) = \| \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} v_1 - u_1 \\ \vdots \\ v_n - u_n \end{bmatrix} \| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \cdots + (v_n - u_n)^2}.$$

2. **Distanza e proiezioni ortogonali**

Supponiamo di avere fissato nel piano un punto O e una unita' di misura per le lunghezze; sottintendiamo che tutti i vettori di cui parleremo abbiano origine in O, e che tutte le lunghezze siano misurate rispetto all'unita' di misura fissata.

Consideriamo una retta l passante per O, un vettore b, e il vettore p proiezione ortogonale di b su l. Osserviamo che per ogni vettore v su l, la distanza fra p e b e' minore-uguale della distanza fra v e b. Infatti, il segmento che congiunge p e b e il segmento che congiunge v e b sono rispettivamente un cateto e l'ipotenusa di uno stesso triangolo rettangolo.



Cosi' p e' il vettore di l che ha distanza minima dal vettore b :

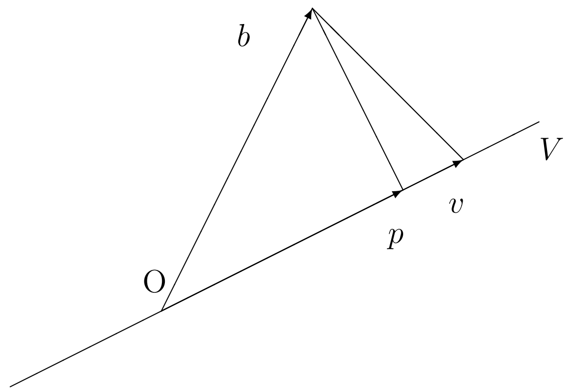
$$\|b - p\| \leq \|b - v\|, \qquad \forall v \in l.$$

Questa considerazione si puo' estendere notevolmente:

Teorema 1. *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e sia b un vettore di $\mathbb{R}^n$. Il vettore p proiezione ortogonale di b su V e' il vettore di V che ha distanza minima dal vettore b :*

$$\begin{aligned} \|b - p\| &\leq \|b - v\|, \qquad \forall v \in V; \\ \|b - p\| &= \|b - v\| \quad \Leftrightarrow \quad v = b. \end{aligned}$$

Dim. Per fissare le idee, faremo riferimento ad una figura simile alla figura nel caso del piano $\mathbb{R}^2$. La dimostrazione sara' comunque basata su proprieta' valide nello spazio $\mathbb{R}^n$.



Dire che p e' la proiezione ortogonale di b su V significa dire che

$$b = p + q, \qquad p \in V, \ q \in V^{\perp}.$$

Ora, per ogni $v \in V$ si ha

$$\begin{aligned}
\|b - v\| &= \|p + q - v\| \\
&= \|(p - v) + q\| \\
&= \sqrt{\|p - v\|^2 + \|q\|^2} \\
&\geq \sqrt{\|q\|^2} \\
&= \|q\| \\
&= \|b - p\|.
\end{aligned}$$

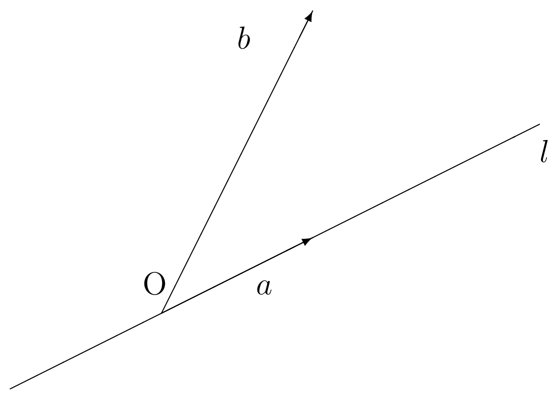
Nel terzo passaggio si e' usato il Teorema di Pitagora; i vettori $p - v$ e q sono ortogonali in quanto $(p - v) \in V$ e $q \in V^{\perp}$. Osserviamo che nel quarto passaggio vale l'uguale se e solo se $\|p - v\| = 0$, cioe' $p - v = 0_n$, cioe' $p = v$.

3. **Distanza, proiezioni ortogonali, minimi quadrati**

   Consideriamo un sistema lineare di due equazioni in una incognita

   $$ax = b, \qquad a \in \mathbb{R}^2, \ x \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}^2,$$

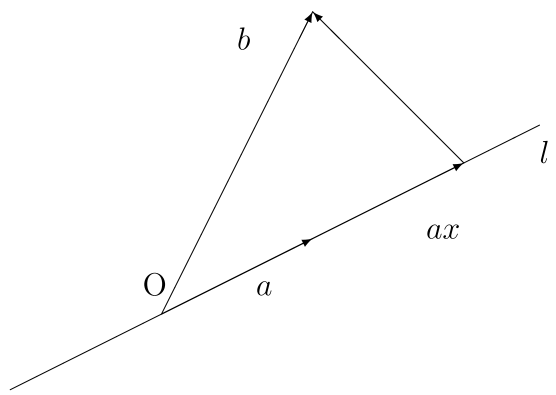
   dove $a \neq 0_2$. Geometricamente, il sistema puo' essere letto come la posizione del problema di rappresentare il vettore b come un multiplo scalare del vettore a. Questo problema ha soluzione se e solo se il vettore b sta sulla retta l generata da a. In generale ci si aspetta che cio' non accada.



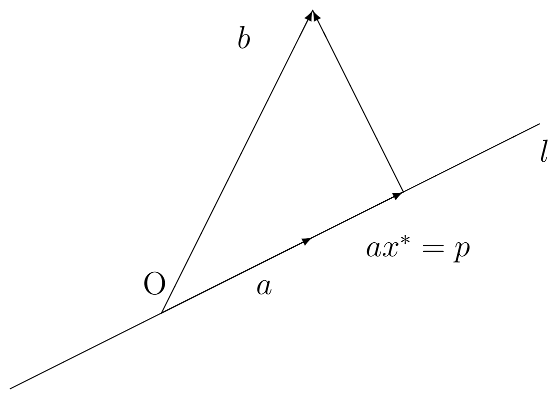
Un valore $x^* \in \mathbb{R}$ dell'incognita x e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema se e solo se l'errore associato ad x^* e' minore-uguale all'errore associato ad un qualsiasi altro valore $x \in \mathbb{R}$. Cio' significa che vale la disuguaglianza

$$\|ax^* - b\| \leq \|ax - b\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Questa disuguiaglianza puo' essere letta dicendo che il vettore ax^* ha, fra i vettori della retta generata da a, distanza minima dal vettore b.



Ora, il vettore ax^* ha, fra i vettori della retta generata da a, distanza minima dal vettore b se e solo se il vettore ax^* e' la proiezione ortogonale p del vettore b sulla retta generata da a.



Ora, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} ax^* &= p \\ b &= p + q, \qquad p \in l, \; q \in l^{\perp}; \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'equazione

$$b = ax^* + q$$

che a sua volta, moltiplicando entrambe i membri a sinistra per a', si riduce alla

$$a'b = a'(ax^* + q) = a'ax^* + a'q = a'ax^*.$$

Dunque $x^* \in \mathbb{R}$ e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema di due equazioni

$$ax = b$$

se e solo se $x^* \in \mathbb{R}$ e' una soluzione esatta dell'equazione

$$a'ax = a'b.$$

Essendo $a \neq 0_2$, si ha $a'a \neq 0$, e questa equazione ha una ed una sola soluzione:

$$x = \frac{a'b}{a'a},$$

il coefficiente di Fourier di b rispetto ad a.

Siamo ora nella posizione di dare la dimostrazione del Teorema sulle soluzioni ai minimi quadrati.

Teorema 2. *Sia $Ax = b$, un sistema lineare di m equazioni in n incognite.*

- *Le soluzioni ai minimi quadrati del sistema $Ax = b$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema di n equazioni in n incognite*

$$A^T A \; x = A^T b;$$

- *questo sistema ha sempre qualche soluzione; la soluzione e' unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti; in questo caso, l'unica soluzione e' data da*

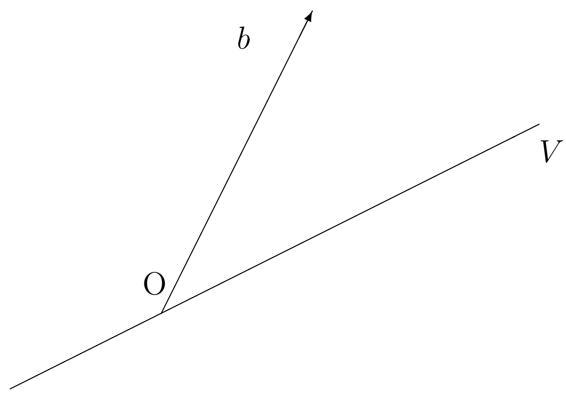
$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

Dim. Per fissare le idee, faremo riferimento a figure simili alle figure nel caso di un sistema di due equazioni in una incognita. La dimostrazione sara' comunque basata su proprieta' valide nello spazio $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo il sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; x \in \mathbb{R}^n, \; b \in \mathbb{R}^m.$$

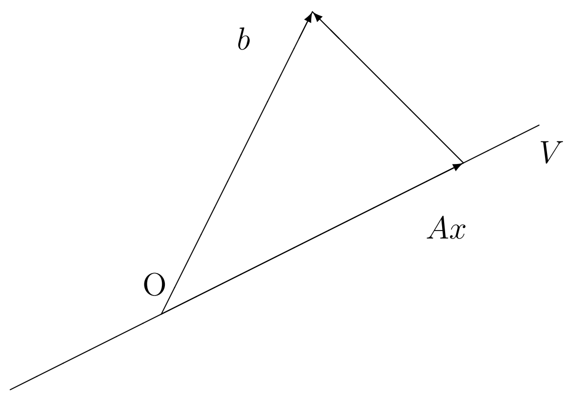
Geometricamente, il sistema puo' essere letto come la posizione del problema di rappresentare il vettore b come una combinazione lineare delle colonne di A. Questo problema ha soluzione se e solo se il vettore b sta nello spazio V generato dalle colonne di A. Se $m > n$, ci si aspetta che in generale cio' non accada.



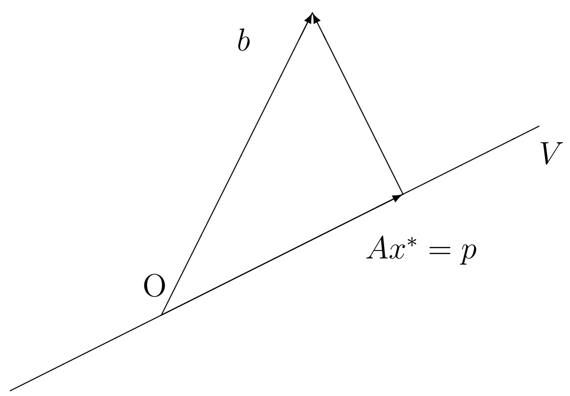
Un valore $x^* \in \mathbb{R}^n$ dell'incognita $x \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema se e solo se l'errore associato ad x^* e' minore-uguale all'errore associato ad un qualsiasi altro valore $x \in \mathbb{R}^n$. Cio' significa che vale la disuguaglianza

$$\|Ax^* - b\| \leq \|Ax - b\|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Questa disuguiaglianza puo' essere letta dicendo che il vettore Ax^* ha, fra i vettori dello spazio V generato dalle colonne di A, distanza minima dal vettore b.



Ora, il vettore Ax^* ha, fra i vettori di V, distanza minima dal vettore b se e solo se il vettore Ax^* e' la proiezione ortogonale p del vettore b su V.



Ora, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} Ax^* &= p \\ b &= p + q, \qquad p \in V,\ q \in V^{\perp}; \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'uguaglianza

$$b = Ax^* + q$$

che a sua volta, moltiplicando entrambe i membri a sinistra per A^T, si riduce alla

$$A^T b = A^T(Ax^* + q) = A^T Ax^* + A^T q = A^T Ax^*.$$

Dunque $x^* \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema di m equazioni

$$Ax = b$$

se e solo se $x^* \in \mathbb{R}^n$ e' una soluzione esatta del sistema di n euqazioni

$$A^T Ax = A^T b.$$

Ci limitiamo ora a considerare il caso in cui le colonne di A siano linearmente indipendenti. In questo caso la matrice $A^T A$ e' invertiblie (vedremo tra poco perche'), e questo sistema ha una ed una sola soluzione:

$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b,$$

il coefficiente di Fourier di b rispetto ad A.

4. **Sulla matrice $A^T A$**

Sia A una matrice di tipo $m \times n$ con colonne linearmente indipendenti. Vogliamo provare che la matrice $A^T A$ quadrata di ordine n e' non singolare, e dunque invertibile. Ci basta provare che il sistema lineare omogeneo

$$A^T Ax = 0_n$$

ha solo la soluzione banale $x = 0_n$.

Moltiplicando a sinistra entrambe i membri per x', si ha

$$x' A^T Ax = x' 0_n = 0,$$

cioe'

$$(Ax)' Ax = 0.$$

Cosi' il prodotto interno del vettore Ax con se' stesso e' zero; cio' capita se e solo se Ax e' il vettore nullo di $\mathbb{R}^m$:

$$Ax = 0_m.$$

Essendo le colonne di A linearmente indipendenti, questo sistema omogeneo ha solo la soluzione banale $x = 0_n$.