Matematica II - Esercizi, IV

1. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix};$$

   determinare se b appartiene o meno allo spazio $\mathrm{span}\{a_1, a_2\}$ generato da a_1, a_2; in caso affermativo, esprimere b come combinazione lineare di a_1 e a_2.

2. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Dire se v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti o indipendenti; se sono linearmente dipendenti, determinare uno di essi che sia combinazione lineare degli altri, e scrivere questa combinazione lineare.

3. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 19 \\ 65 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \\ 64 \end{bmatrix};$$

   determinare la dimensione dei seguenti spazi

$$\mathrm{span}\{a, b\}, \quad \mathrm{span}\{a, b, c\}, \quad \mathrm{span}\{a, b, d\}.$$

4. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix},$$

   dove r, s, t sono dei parametri.

   - determinare la proiezione ortogonale di b su $\mathrm{span}\{a\}$;
   - determinare la proiezione ortogonale di c su $\mathrm{span}\{a, b\}$;
   - verificare i risultati nel caso $r = s = t = 1$.

5. E' dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}.$$

   Determinare la soluzione ai minimi quadrati del sistema, e determinare le norma dell'errore ad essa associato.

6. Determinare la retta

$$y = a + bx$$

che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati l'insieme dei dati

x	y
1	1
2	2
-3	t

dove t e' un parmetro reale. Per quali valori di t la retta ha pendenza positiva, nulla, o negativa?

7. Siano a, b, c tre vettori e V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $\mathrm{span}\{a, b, c\} \subseteq V$ se e solo se $\{a, b, c\} \subseteq V$.

8. Usando formula $p = A\ (A^T A)^{-1} A^T b$ per la proiezione ortogonale del vettore $b \in \mathbb{R}^n$ sullo spazio V generato dalle colonne della matrice A di tipo $n \times m$, si verifichi che

   - se $b \in V$, allora $p = b$;
   - se $b \in V^\perp$, allora $p = 0_n$;
   - $b - p \in V^\perp$.

9. Si dimostri che per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right);$$

quale significato geometrico ha questa uguaglianza?