Matematica II, 16.11.10

1. **Equazioni lineari in una incognita**

   Per "equazione lineare nell'incognita x" intendo un'equazione del tipo

   $$ax = b,$$

   dove a, b sono due costanti reali; a e' il "coefficiente" e b e' il "termine noto" dell'equazione. Una "soluzione" dell'equazione e' un numero reale r che sostituito all'incognita x renda vera l'uguaglianza, cioe' tale che

   $$ar = b.$$

   L'equazione e' "determinata", "impossibile", "indeterminata" secondoche possieda esattamente una soluzione, nessuna soluzione, almeno due soluzioni.

   Ad esempio: l'equazione $2x = 3$ ha l'unica soluzione $x = 2/3$, ed e' determinata; l'equazione $0x = 3$ non ha alcuna soluzione, ed e' impossibile; l'equazione $0x = 0$ ha come soluzione ogni numero reale, ed e' indeterminata. In generale per l'equazione lineare $ax = b$ si ha: se $a \neq 0$, allora l'equazione ha l'unica soluzione $x = b/a$, ed e' determinata; se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora l'equazione non ha soluzioni, ed e' impossibile; se $a = 0$ e $b = 0$, allora l'equazione ha come soluzione ogni numero reale, ed e' indeterminata.

2. **Sistemi di equazioni lineari in due incognite.**

   Per "equazione lineare nelle incognite x, y" intendo un'equazione del tipo

   $$ax + by = c,$$

   dove a, b, c sono tre costanti reali; a e b sono i "coefficienti" e c e' il "termine noto" dell'equazione. Una "soluzione" dell'equazione e' una coppia ordinata (r, s) di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite x e y renda vera l'uguaglianza, cioe' tale che

   $$ar + bs == c.$$

   Tranne che nel caso "degenere", in cui $a = b = 0$, le soluzioni dell'equazione formano una retta nel piano.

   Il generico sistema di di m equazioni lineari nelle incognite x, y si puo' rappresentare nella forma

   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \quad\vdots \\ a_mx + b_my = c_m \end{cases},$$

   dove $a_1, b_1, c_1, \ldots, c_m$ sono costanti reali; gli a_i e i b_i sono i "coefficienti" e i c_i sono i "termini noti" dell'equazione. Una "soluzione" dell'equazione e' una coppia ordinata (r, s) di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite x e y

rende vera ciascuna uguaglianza. Il sistema e' "determinato", "impossibile", "indeterminato" secondoche possieda esattamente una soluzione, nessuna soluzione, almeno due soluzioni.

Il problema di determinare le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari non degeneri in x, y equivale al problema di determinare l'intersezione di m rette nel piano.

3. **Esempio 1.**

   Consideriamo l'equazione
   $$x + 2y = 3$$
   lineare nelle incognite x, y. Una soluzione dell'equazione e' $(1, 1)$, e un'altra soluzione e' $(3, 0)$. Le soluzioni dell'equazione formano una retta nel piano, la retta che congiunge questi due punti.

   Le soluzioni dell'equazione si possono descrivere come segue: possiamo ricavare l'incognita x in funzione dell'incognita y, ottenendo $x = -2y + 3$, assegnare alla y un qualsiasi valore, e prendere per x il valore corrispondente. In breve:
   $$\begin{cases} x = -2y + 3 \\ y = \ qualsiasi \end{cases}$$

   Le soluzioni dell'equazione si possono descrivere anche come segue: possiamo ricavare l'incognita y in funzione dell'incognita x, ottenendo $y = -1/2x + 3/2$, assegnare alla x un qualsiasi valore, e prendere per y il valore corrispondente. In breve:
   $$\begin{cases} y = -1/2x + 3/2 \\ x = \ qualsiasi \end{cases}$$

   L'equazione e' indeterminata; possiamo dire che c'e' "un'incognita libera".

4. **Esempio 2.**

   Consideriamo il sistema
   $$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$
   di due equazioni lineari nelle incognite x, y. Le soluzioni di ciascuna equazione formano una retta nel piano, e le soluzioni del sistema sono i punti comuni alle due rette ... In linea di massima, ci si puo' aspettare che le due rette siano incidenti in un punto, e dunque che il sistema sia determinato.

   Possiamo risolvere il sistema col metodo di sostituzione come segue. Dalla prima equazione ricaviamo l'incognita x in funzione della y, e nella seconda equazione sostituiamo alla x la sua espressione in funzione della y, ottenendo
   $$\begin{cases} x = -2y + 3 \\ 4(-2y + 3) + 5y = 6 \end{cases},$$
   cioe'
   $$\begin{cases} x = -2y + 3 \\ -3y = -6 \end{cases};$$

dalla seconda equazione ricaviamo il valore della $y : y = 2$; a questo valore della y corrisponde il valore $x = -2 \cdot 2 + 3 = -1$ della x. Dunque c'e' una ed una sola soluzione: il punto

$$(-1, 2).$$

Il sistema e' determinato.

5. **Esempio 3.**

   Consideriamo il generico sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

   di due equazioni lineari nelle incognite x, y, e supponiamo che entrambe le equazioni siano nondegeneri. Le soluzioni di ciascuna equazione formano una retta nel piano, e le soluzioni del sistema sono i punti comuni alle due rette ... in linea di massima, ci si puo' aspettare che le due rette siano incidenti in un punto, e dunque che il sistema sia determinato. Ma cio' non e' detto che accada.

   Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 8x - 10y = 7 \end{cases}.$$

   Osserviamo che il primo membro della seconda equzione e' il doppio del primo membro della prima equazione, mentre il termine noto della seconda equzione non e' il doppio del termine noto della prima equazione. Le due equazioni sono incompatibili, il sistema non ha soluzioni, ed e' impossibile. Alle due equazioni corrispondeono due rette parallele.

   Consideriamo ora il sistema

$$\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 8x - 10y = 12 \end{cases}.$$

   Osserviamo che il primo membro della seconda equzione e' il doppio del primo membro della prima equazione, e il termine noto della seconda equzione e' il doppio del termine noto della prima equazione. Le due equazioni sono compatibili, ma la seconda equazione non aggiunge niente di nuovo ... il sistema ha come soluzioni le soluzioni della sua prima equazione, ed e' indeterminato. Alle due equazioni corrispondeono due rette coincidenti.

6. **Sistemi di equazioni lineari in tre incognite.**

   Per "equazione lineare nelle incognite x, y, z" intendo un'equazione del tipo

$$ax + by + cz = d,$$

   dove a, b, c, d sono costanti reali; a, b, c sono i "coefficienti" e d e' il "termine noto" dell'equazione. Una "soluzione" dell'equazione e' una terna ordinata (r, s, t) di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite x, y, z renda vera l'uguaglianza, cioe' tale che

$$ar + bs + ct = d.$$

Tranne che nel caso "degenere", in cui $a = b = c = 0$, le soluzioni dell'equazione formano un piano nello spazio.

Il generico sistema di di m equazioni lineari nelle incognite x, y, z si puo' rappresentare nella forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \quad\vdots \\ a_mx + b_my + c_mz = d_m \end{cases},$$

dove $a_1, b_1, c_1, \ldots, d_m$ sono costanti reali; gli a_i, b_i, c_i sono i "coefficienti" e i d_i sono i "termini noti" dell'equazione. Una "soluzione" dell'equazione e' una terna ordinata (r, s, t) di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite x, y, z rende vera ciascuna uguaglianza. Il sistema e' "determinato", "impossibile", "indeterminato" secondoche possieda esattamente una soluzione, nessuna soluzione, almeno due soluzioni.

Il problema di determinare le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari non degeneri in x, y, z equivale al problema di determinare l'intersezione di m piami nello spazio.

7. **Esempio 1.**

   Consideriamo l'equazione

   $$2x + 3y + 4z = 12$$

   lineare nelle incognite x, y, z. Tre soluzioni dell'equazione sono $(6, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ e $(0, 0, 3)$. Le soluzioni dell'equazione formano un piano nello spazio, il piano che congiunge questi tre punti.

   Le soluzioni dell'equazione si possono descrivere come segue: possiamo ricavare l'incognita x in funzione delle incognite y, z ottenendo $x = -3/2y - 2z + 6$, assegnare alle y, z un qualsiasi valore, e prendere per x il valore corrispondente. In breve:

   $$\begin{cases} x = -3/2y - 2z + 6 \\ y = \ qualsiasi \\ z = \ qualsiasi \end{cases}$$

   L'equazione e' indeterminata; possiamo dire che ci sono "due incognite libere".

8. **Esempio 2.**

   Consideriamo il sistema

   $$\begin{cases} x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 7y + 8z &= 3 \end{cases}$$

   di due equazioni lineari nelle incognite x, y, z. Le soluzioni di ciascuna equazione formano un piano nello spazio, e le soluzioni del sistema sono i punti comuni ai due piani ... in linea di massima, ci si puo' aspettare che le i due piani siano incidenti in una retta, e dunque che il sistema sia indeterminato.

Possiamo risolvere il sistema col metodo di sostituzione come segue. Dalla prima equazione ricaviamo l'incognita x in funzione delle y, z e nella seconda equazione sostituiamo alla x la sua espressione in funzione delle y, z ottenendo

$$\begin{cases} x &= -2y - 4z + 3 \\ 3(-2y - 4z + 3) + 7y + 8z &= 3 \end{cases},$$

cioe'

$$\begin{cases} x &= -2y - 4z + 3 \\ y - 4z &= -6 \end{cases};$$

dalla seconda equazione ricaviamo la y in funzione della $z : y = 4z - 6$; a questa espressione della y corrisponde l'epressione $x = -2(4z - 6) - 4z + 3 = -12z + 15$ della x in funzione della z. Dunque possiamo descivere le soluzioni come segue:

$$\begin{cases} x &= -12z + 15 \\ y &= 4z - 6 \\ z &= \textit{qualunque} \end{cases}.$$

Il sistema e' indeterminato, e c'e' un'incognita libera.

9. **Esempio 3.**

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 7y + 8z &= 3 \\ 5x + 9y + 25z &= 22 \end{cases}$$

di tre equazioni lineari nelle incognite x, y, z. Le soluzioni di ciascuna equazione formano un piano nello spazio, e le soluzioni del sistema sono i punti comuni ai tre piani ... in linea di massima, ci si puo' aspettare che le i tre piani siano incidenti in un punto, e dunque che il sistema sia determinato.

Possiamo risolvere il sistema col metodo di sostituzione come segue. Dalla prima equazione ricaviamo l'incognita x in funzione delle y, z e nella seconda e terza equazione sostituiamo alla x la sua espressione in funzione delle y, z ottenendo

$$\begin{cases} x &= -2y - 4z + 3 \\ 3(-2y - 4z + 3) + 7y + 8z &= 3 \\ 5(-2y - 4z + 3) + 9y + 25z &= 22 \end{cases},$$

cioe'

$$\begin{cases} x &= -2y - 4z + 3 \\ y - 4z &= -6 \\ -y + 5z &= 7 \end{cases};$$

dalla seconda equazione ricaviamo la y in funzione della z : e nella terza equazione sostituiamo alla y la sua espressione in funzione delle z ottenendo

$$\begin{cases} x &= -2y - 4z + 3 \\ y &= 4z - 6 \\ -4z + 6 + 5z &= 7 \end{cases};$$

cioe'

$$\begin{cases} x &= -2y - 4z + 3 \\ y &= 4z - 6 \\ z &= 1 \end{cases} ;$$

... sostituendo all'indietro otteniamo una ed una sola soluzione:

$$(3, -2, 1).$$

Il sistema e' determinato. I tre piani si intersecano esattamente in un punto dello spazio.

10. **Esempio 4.**

Consideriamo il generico sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_2x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

di tre equazioni lineari nelle incognite x, y, z e supponiamo che tutte le equazioni siano nondegeneri. Le soluzioni di ciascuna equazione formano una piano nello spazio, e le soluzioni del sistema sono i punti comuni ai tre piani ... in linea di massima, ci si puo' aspettare che i tre piani siano incidenti in un punto, e dunque che il sistema sia determinato. Ma cio' non e' detto che accada.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 7y + 8z &= 3 \\ 4x + 9y + 12z &= 7 \end{cases}$$

Osserviamo che il primo membro della terza equazione e' la somma dei primi membri delle prime due equazioni, mentre il termine noto della terza equazione non e' la somma dei termini noti delle prime due equazioni. Le tre equazioni sono incompatibili, il sistema non ha soluzioni, ed e' impossibile.

Consideriamo ora il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 7y + 8z &= 3 \\ 4x + 9y + 12z &= 6 \end{cases}$$

Osserviamo che il primo membro della terza equazione e' la somma dei primi membri delle prime due equazioni, e il termine noto della terza equazione e' la somma dei termini noti delle prime due equazioni. La terza equazione e' conseguenza delle prime due, il sistema in realta' consiste di due equazioni, ... ed e' indeterminato.

11. **Sistemi di equazioni lineari in n incognite.**

Per "equazione lineare nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$" intendo un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono i "coefficienti" e b e' il "termine noto" dell'equazione. In breve, possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b.$$

Una "soluzione" dell'equazione e' una ennupla ordinata $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ renda vera l'uguaglianza, cioe' tale che

$$\sum_{j=1}^{n} a_j r_j = b.$$

Tranne che nel caso "degenere", in cui $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0$, l'equazione ha infinite soluzioni, e ci sono $n-1$ incognite libere.

Il generico sistema di m equazioni lineari nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si puo' rappresentare nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i "coefficienti" e i b_i sono i "termini noti" dell'equazione. In breve possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Una "soluzione" dell'equazione e' una ennupla ordinata $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rende vera ciascuna uguaglianza. Il sistema e' "determinato", "impossibile", "indeterminato" secondoche possieda esattamente una soluzione, nessuna soluzione, almeno due soluzioni.

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite si puo' risolvere col metodo di sostituzione come segue. In linea di massima, si puo' esplicitare dalla prima equazione l'incognita x_1 in funzione delle incognite $x_2, \ldots, x_n$ e sostituire in ciascuna delle equazioni dalla seconda in poi alla x_1 questa espressione. In questo modo nelle equazioni dalla seconda in poi compaiono solo le $n-1$ incognite $x_2, \ldots, x_n$. Ci si e' ricondotti cosi' da un sistema di m equazioni in n incognite ad un sistema di $m-1$ equazioni in $n-1$ incognite. Si itera il passo.