Matematica II, 17.11.10

1. **processo di triangolarizzazione, esempio. I**

   Consideriamo il sistema lineare di tre equazioni nelle incognite x, y, z

   $$\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 8 \\ 4x + 9y + 16z &= 14 \\ 8x + 27y + 64z &= 14 \end{cases}.$$

   Primo passo. Usiamo la prima equazione per eliminare la x dalla seconda e terza equazione, sottraendo alla seconda equazione il doppio della prima:

   $$4x + 9y + 16z - 2 \cdot (2x + 3y + 4z) = 14 - 2 \cdot 8$$

   e sottraendo alla terza equazione 4 volte la prima:

   $$8x + 27y + 64z - 4 \cdot (2x + 3y + 4z) = 14 - 4 \cdot 8.$$

   Otteniamo cosi' il sistema

   $$\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 8 \\ 3y + 8z &= -2 \\ 15y + 48z &= -18 \end{cases}.$$

   Secondo passo. Usiamo la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione, sottraendo alla terza equazione 5 volte la seconda:

   $$15y + 48z - 5 \cdot (3y + 8z) = -18 - 5 \cdot (-2).$$

   Ottiamo cosi' il sistema

   $$\begin{cases} 2x + 3y + 4z &= 8 \\ 3y + 8z &= -2 \\ 8z &= -8 \end{cases}.$$

   Ora il sistema si puo' risolvere ricavando la z dalla terza equazione, sostituendo il valore della z nella seconda e ricavando da essa la y, e sostituendo i valori della z e della y nella prima e ricavando da essa la x. Il sistema e' determinato.

2. **processo di triangolarizzazione, esempio. II**

   Possiamo rappresentare ciascun sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite x, y, z con la matrice di 3 righe e 4 colonne che ha nelle sue righe i coefficienti e il termine noto della prima, seconda, terza equazione, e che ha dunque ha nella sue colonne i coefficienti della x, y, z e i termini noti. Alle operazioni sulle equazioni di un sistema corrispondono operazioni sulle righe di una matrice.

   Al processo descritto nel punto precedente sui sistemi corrisponde il processo seguente sulle metrici. E' data la matrice

   $$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 16 & 14 \\ 8 & 27 & 64 & 14 \end{array}\right]$$

Primo passo. Usiamo la prima riga per annullare il primo elemento nella seconda e terza riga, sottraendo a ciascun elemento della seconda riga 2 volte il corrispondente elemento della prima riga, e sottraendo a ciascun elemento della terza riga 4 volte il corrispondente elemento della prima riga:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 4-2\cdot 2 & 9-2\cdot 3 & 16-2\cdot 4 & 14-2\cdot 8 \\ 8-4\cdot 2 & 27-4\cdot 3 & 64-4\cdot 4 & 14-4\cdot 8 \end{array}\right].$$

Otteniamo cosi' la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 15 & 48 & -18 \end{array}\right].$$

Secondo passo. Usiamo la seconda riga per annullare il secondo elemento della terza riga, sottraendo a ciascun elemento della terza riga 5 volte il corrispondente elemento della seconda riga:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0-5\cdot 0 & 15-5\cdot 3 & 48-5\cdot 8 & -18-5\cdot(-2) \end{array}\right].$$

Otteniamo cosi' la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right].$$

3. **operazioni sulle righe di una matrice**

Sia data una matrice con m righe ed n colonne, in breve una matrice $m \cdot n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & g_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & b_m & \dots & g_m \end{bmatrix},$$

dove $a, b, \dots, g$ sono n simboli. Indichiamo con R_i la $i-$ma riga della matrice:

$$R_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i & \dots & g_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Definiamo le seguenti operazioni sulle righe della matrice:

- moltiplicare la riga $i-$ma per un numero reale r :

$$rR_i = r\begin{bmatrix} a_i & b_i & \dots & g_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_i & rb_i & \dots & rg_i \end{bmatrix}$$

- sommare alla riga $j-$ma la riga $i-$ma:

$$\begin{aligned} R_j + R_i &= \begin{bmatrix} a_j & b_j & \dots & g_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i & b_i & \dots & g_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_j + a_i & b_j + b_i & \dots & g_j + g_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le "operazioni elementari" sulle righe della matrice sono:

- sommare alla riga $j-$ma la riga $i-$ma (dove $i \neq j$) moltiplicata per un numero reale r :
$$R_j := R_j + rR_i$$
- moltiplicare la riga $i-$ma per un numero reale $r \neq 0$:
$$R_i := rR_i$$
- scambiare la riga $i-$ma e la riga $j-$ma:
$$R_j := R_i, \quad R_i := R_j.$$

4. **matrici triangolari**

Sia data una matrice $m \cdot n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Gli elementi della "diagonale (discendente)" della matrice A sono $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{ii}, \dots$
Diciamo che la matrice A e' "triangolare (superiore)" se tutti gli elementi di A al di sotto della diagonale sono nulli, cioe' se

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j.$$

Diciamo che la matrice A e' "triangolare nondegenere" se e' triangolare e tutti i suoi elementi diagonali sono non nulli:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j; \quad a_{ii} \neq 0, \quad \forall i.$$

5. **processo di triangolarizzazione**

Il processo di triangolarizzazione trasforma matrici $m \cdot n$ in matrici $m \cdot n$ triangolari, usando operazioni elementari sulle righe. Opera come segue.

Sia data una matrice $m \cdot n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & g_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & g_2 \\ a_3 & b_3 & \dots & g_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & b_m & \dots & g_m \end{bmatrix},$$

dove $a, b, \dots, g$ sono n simboli; indichiamo con R_i la $i-$ma riga della matrice:

$$R_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i & \dots & g_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

- Passo 1 (I). Se nella prima colonna c'e' almeno un elemento $a_i \neq 0$, possiamo fare in modo che $a_1 \neq 0$ applicando eventualmente uno scambio di righe, e possiamo annullare tutti gli elementi $a_2, \ldots, a_m$ sotto a_1 sommando alla seconda, terza, ..., $m-$ma riga opportuni multipli della prima:

$$R_i := R_i - \frac{a_i}{a_1} R_1, \quad i = 2, \ldots, m.$$

  Fatto questo si va al Passo 3.

- Passo 1 (II). Se nella prima colonna tutti gli elementi sono nulli, si va al passo 3.

Dopo il Passo 1, la matrice A ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & g_1 \\ 0 & b_2 & \ldots & g_2 \\ 0 & b_3 & \ldots & g_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_m & \ldots & g_m \end{bmatrix}.$$

- Passo 3. Si ripete il Passo 1 sulla matrice $(m-1) \cdot (n-1)$

$$A = \begin{bmatrix} b_2 & \ldots & g_2 \\ b_3 & \ldots & g_3 \\ \vdots & & \vdots \\ b_m & \ldots & g_m \end{bmatrix}.$$

6. **Processo di triangolarizzazione, applicazione**

Il processo di triangolarizzazione puo' essere usato per risolvere i sistemi lineari nel modo seguente. Dato un sistema, si passa alla corrispondente matrice, si applica alla matrice il processo di triangolarizzazione, e si passa al corrispondente sistema lineare.

$$\begin{array}{ccc} sist. & \rightarrow & matr. \\ & & \downarrow \\ sist.\ tr. & \leftarrow & matr.\ tr. \end{array}$$

Se la matrice triangolare e' nondegenere, allora si puo' facilmente decidere se il sistema corrispondente e' determinato, indeterminato o impossibile, e determinarne le soluzioni.

- E' dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

La matrice corrispondente e'

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice il processo di triangolarizzazione si ottiene una matrice triangolare del tipo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right].$$

Supponiamo che questa matrice sia triangolare nondegenere, cioe' che $a'_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. A questa matrice corrisponde il sistema triangolare

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

Essendo $a'_{ii} \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$, possiamo ricavare in modo univoco a partire dall'ultima equazione via via le incognite $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$. Il sistema e' determinato.

- E' dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

con $m < n$. La matrice corrispondente e'

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice il processo di triangolarizzazione si ottiene una matrice triangolare del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2m} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{mm} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right].$$

Supponiamo che questa matrice sia triangolare nondegenere, cioe' che $a'_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$. A questa matrice corrisponde il sistema triangolare

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1m}x_m + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2m}x_m + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{mm}x_m + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Essendo $a'_{ii} \neq 0$ $\forall i = 1, \ldots, m$. possiamo ricavare in modo univoco a partire dall'ultima equazione via via le incognite $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ in funzione delle incognite $x_{n+1}, \ldots, x_m$. Il sistema e' indeterminato, e ci sono $n-m$ incognite libere.

- E' dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

con $m > n$. La matrice corrispondente e'

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice il processo di triangolarizzazione si ottiene una matrice triangolare del tipo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right].$$

Supponiamo che questa matrice sia triangolare nondegenere, cioe' che $a'_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e $b'_{n+1} \neq 0$. A questa matrice corrisponde un sistema triangolare che ha come $(n+1)-$ma equazione

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b'_{n+1}.$$

Essendo $b'_{n+1} \neq 0$, questa equazione e' impossibile, e dunque anche il sistema e' impossibile.