Matematica II, 19.11.10

1. Abbiamo visto che un in linea di massima un sistema lineare di m equazioni in n incognite si puo' discutere e risolvere passando alla matrice corrispondente, applicando ad essa il processo di triangolarizzazione, e passando al sistema corrispondente. Se il processo di triangolarizzazione produce una matrice triangolare nondegenere, allora quest'ultimo sistema e' indeterminato, determinato o impossibile secondoche m sia minore, uguale, o maggiore di n. Nel caso $m < n$ il sistema si puo' risolvere esplicitando le prime m incognite in funzione delle rimanenti $n - m$ incognite, che rimangono libere di assumere qualsiasi valore. Scopo di questa lezione e' presentare un raffinamento del processo di triangolarizzazione, che rende il metodo di discussione e risoluzione dei sistemi efficace in ogni eventualita'.

2. Consideriamo il sistema di tre equazioni lineari nelle incognite u, v, x, y :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u+2v+2x+y & = & 1 \\ 2u+4v+7x+3y & = & 5 \\ -u-2v+4x+y & = & 5 \end{array}\right. .$$

A questo sistema corrisponde la matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Sommando alla seconda e terza riga opportuni multipli dela prima riga, otteniamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Questa matrice e' triangolare (degenere). Ma si puo' semplificare ulteriormente, sottraendo 2 volte la seconda riga dalla terza si ha

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} u+2v+2x+y & = & 1 \\ 3x+y & = & 3 \end{array}\right. .$$

Ora, possiamo risolvere la seconda equazione rispetto alla x in funzione della y :

$$x = -\frac{1}{3}y + 1,$$

nella prima equazione sostituire alla x questa espressione

$$u + 2v + 2(-\frac{1}{3}y + 1) + y = 1$$

e risolvere questa equazione rispetto alla u in funzione della v e della y :

$$u = -2v - \frac{1}{3}y - 1.$$

Dunque le soluzioni sono date da

$$\begin{array}{rcr} u & = & -2v - \frac{1}{3}y - 1 \\ v & = & qualsiasi \\ x & = & -\frac{1}{3}y + 1 \\ y & = & qualsiasi \end{array}$$

3. **Matrici a scala**

Data una riga R non nulla di una matrice, diciamo "pivot" di R il suo primo elemento non nullo; in simboli, posto

$$R = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n],$$

il pivot di R e' a_j se $a_1 = \ldots = a_{j-1} = 0$, mentre $a_j \neq 0$.

Diciamo che una matrice A e' una "matrice a scala (per righe)" se il pivot della prima riga sta strettamente a sinistra del pivot della seconda riga, che a sua volta sta strettamente a sinistra del pivot della terza riga, che a sua volta ... e le righe nulle vengono per ultime.

Le matrici a scala con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \end{bmatrix}$$

In ciascuna di queste matrici, il simbolo $\diamond$ indica un numero non nullo, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

In generale, una matrice a scala con m righe ed n colonne e' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & b_{j_2} & & & & & & & & \\ 0 & \dots & & & \dots & & 0 & \dots & 0 & c_{j_3} & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & \dots & & & \dots & & & \dots & 0 & f_{j_p} & \dots & f_n \\ 0 & \dots & & & \dots & & & \dots & & & \dots & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

con $a_{j_1}, b_{j_2}, c_{j_3}, \dots, f_{j_p} \neq 0$, dove $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_p \leq n$ e $0 \leq p \leq m$.

Osserviamo esplicitamente che,

$$0 \leq p \leq \mathrm{Min}(m, n).$$

Infatti: per la definizione di pivot, ciascuna riga di A contiene al piu' un pivot (cosi' $p \leq m$), e per la definizione di matrice a scala, ciascuna colonna di A contiene al piu' un pivot (cosi' $p \leq n$).

4. **Algoritmo di Gauss**

L'algoritmo di Gauss prende in entrata una matrice $m \cdot n$ e la trasforma, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice a scala $m \cdot n$. L'algoritmo puo' essere descritto informalmente come segue.

Sia data una matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

con m righe ed n colonne. Se tutte le righe sono nulle allora l'algoritmo termina, e porge questa matrice.

Se qualche riga non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la prima riga sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle. La matrice assume allora la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{j_1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

dove $a_{j_1} \neq 0$. Sommando alla seconda, terza, ... riga un opportuno multiplo della prima riga, possiamo annullare tutti gli elementi sotto il pivot della prima riga, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & a_{j_1+1} & \dots \\ 0 & \dots & & 0 & b_{j_1+1} & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Se tutte le righe dalla seconda in poi sono nulle allora l'algoritmo termina, e porge questa matrice.

Se qualche riga dalla seconda in poi non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la seconda riga sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle dalla seconda in poi. La matrice assume allora la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & \dots & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & b_{j_2} & \dots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & c_{j_2} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

dove $a_{j_1}, b_{j_2} \neq 0$ e $j_1 < j_2$. Sommando alla terza, quarta, ... riga un opportuno multiplo della seconda riga, possiamo annullare tutti gli elementi sotto il pivot della seconda riga, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j_1} & \dots & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & b_{j_2} & b_{j_2+1} & \dots \\ 0 & \dots & & & \dots & & 0 & c_{j_2+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Se tutte le righe dalla terza in poi sono nulle allora l'algoritmo termina, e porge questa matrice.

Se qualche riga dalla terza in poi non e' nulla, operando eventualmente uno scambio di righe, possiamo fare in modo che la terza riga sia non nulla ed il suo pivot stia piu' a sinistra rispetto ai pivot delle altre righe non nulle dalla terza in poi ....

In ogni eventualita' l'algoritmo termina porgendo una matrice a scala.

5. **Metodo di soluzione generale**

Possiamo usare l'algoritmo di Gauss per risolvere i sistemi lineari in modo meccanico.

Sia dato un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

di m equazioni nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$. Consideriamo la matrice del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

ed applichiamo a questa matrice l'algoritmo di Gauss, ottenendo cosi' una matrice a scala. Indichiamo con p il numero dei pivot, e con $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n+1$ gli indici di colonna dei pivot.

Distinguiamo due casi.

- Se $j_p < n+1$, allora la matrice a scala avra' una forma del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a'_{1j_1} & & & & & & & & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & a'_{2j_2} & & & & & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & & & \dots & 0 & a'_{pj_p} & \dots & a'_{pn} & b'_p \\ 0 & \dots & & & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \end{array}\right],$$

  con $a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \dots, a'_{pj_p} \neq 0$.
  A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{lllcl} a'_{1j_1}x_{j_1}+ \quad \dots & & & +a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & a'_{2j_2}x_{j_2}+ \quad \dots & & +a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & \vdots & \\ & & a'_{pj_p}x_{j_p}+ & \dots \quad +a'_{pn}x_n & = & b'_p \end{array}\right.,$$

  che ha le stesse soluzioni del sistema dato.
  Il sistema ha soluzioni. Per $p = n$, il sistema e' determinato. Per $p < n$ possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite
  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}$,
  lasciando le altre $n-p$ incognite libere, e il sistema e' indeterminato.

- Se $j_p = n+1$, allora la matrice a scala avra' la $p-$ma riga del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_p \end{array}\right],$$

  con $b'_p \neq 0$.
  Alla matrice a scala corrisponde un sistema che ha le stesse soluzioni del sistema dato, e che ha come $p-$ma equazione

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b'_p$$

  Questa equazione, e con essa il sistema, e' impossibile.

6. **Sistemi lineari omogenei. Alcuni risultati generali**

Un sistema lineare in cui tutti i termini noti sono nulli

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

viene detto "sistema lineare omogeneo". Ciascun sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione, quella in cui ad ogni variabile e' assegnato il valore 0. Questa viene detta "soluzione banale" del sistema.

Proposizione 1. *Sia dato un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Se $m < n$, allora il sistema e' indeterminato, di piu', ha infinite soluzioni che dipendeno da almeno $n - m$ incognite libere.*

Dimostrazione Applichiamo al sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite dato la discussione descritta nel punto precedente.

Al sistema dato corrrisponde una matrice di m righe ed $n+1$ colonne, la cui ultima colonna ha tutti gli elementi nulli. Applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss si ottiene una matrice a scala, la cui ultima colonna ha ancora tutti gli elementi nulli. Dunque il secondo punto della discussione non si presenta.

Indicato con p il numero dei pivot di questa matrice si ha: se $p = n$ allora il sistema corrispondente e' determinato, mentre se $p < n$ allora il sistema corrispondente e' indeterminato, e ci sono $n - p$ incognite libere.

Ora, nel nostro caso si ha che $p < n$, in quanto $p \leq m$ (per definizione di pivot), e $m \leq n$ (per ipotesi). Dunque il sistema e' indeterminato e ci sono $n - p \geq n - m$ incognite libere. $\square$

Proposizione 2. *Sia data una matrice quadrata*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

I sistemi lineari che hanno matrice dei coefficienti A

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \qquad (\dagger)$$

sono tutti determinati se e solo se il sistema lineare omogeneo che ha matrice dei coefficienti A

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases} \qquad (\ddagger)$$

e' determinato.

Dimostrazione Fra i sistemi (†) si ha in particolare il sistema omogeneo (‡), (che si ottiene per $b_1 = \ldots = b_n = 0$.)

Ovviamente, se tutti i sistemi (†) sono determinati, allora anche il sistema (‡) e' determinato.

Viceversa, assumiamo che il sistema (‡) sia determinato e proviamo che tutti i sistemi (†) sono determinati.

- Al sistema (‡) corrisponde una matrice con n righe ed $n+1$ colonne, che ha l'ultima colonna nulla. Applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss, si ottiene una matrice a scala, che ha ancora l'ultima colonna nulla. Indicato con p il numero dei pivot di questa matrice si ha: se $p = n$ allora il sistema corrispondente e' determinato, mentre se $p < n$ allora il sistema corrispondente e' indeterminato. Ora, il sistema e' determinato (per ipotesi). Ne deduciamo che $p = n$.

  Da cio' segue che la matrice a scala sara' triangolare nondegenere, del tipo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{nn} & 0 \end{array}\right],$$

  con $a'_{11}, \dots, a'_{nn} \neq 0$.

- Al sistema (†) corrisponde la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

  Applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss, con gli stessi passi del punto precedente, si otterra' la matrice la scala

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right],$$

  dove gli a'_{ij} sono gli stessi del punto precedente; in particolare si ha $a'_{11}, \dots, a'_{nn} \neq 0$. Ora, questa matrice e' triangolare nondegenere, dunque il sistema (†) e' determinato.

□