Matematica II 24.11.10

Matrice inversa

1. Per $n = 1$, l'insieme $\mathbb{R}^{n \times n}$ delle matrici quadrate di ordine n diventa l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali.

   In $\mathbb{R}$, il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale e' uguale a quell'altro numero reale:

   $1\ a = a = a\ 1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

   L'inverso a^{-1} di un numero reale non nullo a e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto del numero reale per il suo inverso e' uguale a 1:

   $a\ a^{-1} = 1 = a^{-1}\ a.$

   Un'equazione lineare

   $ax = b$

   nell'incognita reale x e' determinata se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l'unica soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} :

   $a^{-1}ax = a^{-1}b; \qquad 1x = a^{-1}b; \qquad x = a^{-1}b.$

   In questa lezione vedremo come queste nozioni e questi fatti si estendono al caso delle matrici quadrate di un qualsiasi ordine $n \geq 1$.

2. **Matrice inversa**

   Definizione *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Una matrice B quadrata di ordine n si dice matrice inversa di A se sia moltiplicando A per B a destra che moltiplicando A per B a sinistra si ottiene la matrice I_n unita' di ordine n :*

   $$AB = I_n = BA.$$

   In tal caso, si dice che A e' invertibile.

   Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se una matrice B quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla sinistra di A e se una matrice C quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla destra di A, allora queste due matrici coincidono; infatti

   $$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

   Dunque se A possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con

   $$A^{-1}.$$

   Nella discussione dei seguenti esempi si adotta un approccio ingenuo. Vedremo in seguito un metodo efficiente per decidere se una matrice e' invertibile o meno e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} p+q & r+s \\ p+2q & r+2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p+q=1 \\ r+s=0 \\ p+2q=0 \\ r+2s=1 \end{cases}.$$

Questo sistema lineare di quattro equazioni in quatto incognite in realta' consiste di due sistemi di due equazioni in due incognite ciascuno. Dalle prima e terza equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite p, q :

$p = 2$,

$q = -1$;

dalla seconda e dalla quarta equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite r, s :

$r = -1$,

$s = 1$;

Dunque c'e' una ed una sola matrice inversa destra di A, ed e'

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che B e' anche inversa sinistra di A, dunque e' l'inversa di A :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chedersi se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + 2q = 1 \\ r + 2s = 0 \\ 2p + 4q = 0 \\ 2r + 4s = 1 \end{cases}.$$

Ora, la seconda e la quarta equazione di questo sistema sono incompatibili. Dunque A non possiede alcuna inversa destra, e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

Concludiamo questo paragrafo osservando due proprieta': se una matrice A e' invertibile, anche la sua inversa A^{-1} e' invertibile, e si ha

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

se A e B sono due matrici invertibili dello stesso ordine, allora anche il loro prodotto AB e' invertibile, e l'inversa di AB e' il prodotto delle inverse, nell'ordine opposto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Verifichiamo questa seconda proprieta':

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1}AB &= B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n, \\ ABB^{-1}A^{-1} &= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

3. **Matrici invertibili e sistemi determinati.**

Teorema 1. *Se una matrice A quadrata di ordine n possiede inversa, allora ciascun sistema lineare di n equazioni in n incognite*

$$Ax = b$$

con matrice dei coefficienti A e' determinato; inoltre, la sua unica soluzione e' data da

$$x = A^{-1}b.$$

Dimostrazione. Dal fatto che A^{-1} e' inversa sinistra di A, ricaviamo

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \\ \left(A^{-1}A\right)x &= A^{-1}b \\ I_nx &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Usando il fatto che A^{-1} e' inversa destra di A, mostriamo che questa e' davvero una soluzione:

$$A\left(A^{-1}b\right) = \left(AA^{-1}\right)b = I_n b = b.$$

cvd

Esempio. Sappiamo che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e' invertible e che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per il Th. precedente, possimo dire che tutti i sistemi $Ax = b$ cioe'

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ x_1 + 2x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

sono determinati, e ciascuno di essi ha soluzione $x = A^{-1}b$, cioe'

$$\begin{cases} x_1 & = & 2b_1 - b_2 \\ x_2 & = & -b_1 + b_2 \end{cases}.$$

Il teorema precedente ha anche un inverso, che enunciamo senza dimostrare.

Teorema 2. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se tutti i sistemi lineari*

$$Ax = b$$

aventi matrice dei coefficienti A sono determinati, allora A e' invertibile.

4. **Algoritmo di Gauss-Jordan.**

Una matrice a scala per righe che soddisfi le ulteriori codizioni

ciascun pivot e' uguale a 1,

ciascun pivot e' l'unico elemento non nullo della sua colonna

si dice matrice *a scala ridotta per righe.*

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici a scala ridotta per righe con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In ciascuna di queste matrici, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

L'algoritmo di Gauss-Jordan prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala ridotta per righe con m righe ed n colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le *operazioni elementari per righe*:

- sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
- scambiare due righe;
- moltiplicare una riga per un numero reale non nullo.

Diamo di seguito una descrizione informale dell'algoritmo.

Usando le prime due operazioni elementari si trasforma la matrice data in una matrice a scala per righe. Osserviamo che tutti gli elementi al di sotto di un pivot sono nulli. Usando la prima operazione elementare si annullano anche tutti gli elementi al di sopra di un pivot. Usando la terza operazione elementare si rendono tutti i pivot uguali a 1.

5. **Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa.**

L'algoritmo di Gauss-Jordan puo' essere usato per decidere se una matrice e' invertible o meno e in caso affermativo calcolare in modo efficiente l'inversa.

Teorema *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Si consideri la matrice*

$$[A|I_n]$$

ottenuta affiancando ad A la matrice I_n unita' di ordine n. A questo matrice si applichi l'algoritmo di Gauss-Jordan, ottenendo cosi' una matrice della forma

$$[H|B].$$

- *se $H = I_n$, allora A e' invertibile, e $A^{-1} = B$;*
- *se $H \neq I_n$, allora A non e' invertibile.*

Illustrazione Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Affiancando ad A la matrice unita' I_3 otteniamo:

$$\left[\ A \mid I_3\ \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Applicando operazioni elementari per righe possiamo ottenere la matrice a scala per righe

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Applicando altre operazioni elementari per righe otteneriamo la matrice a scala ridotta per righe

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\ I_3 \mid B\ \right].$$

Dunque A e' invertibile e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. **Potenze**

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero realtivo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ la potenza $p-$ma della matrice A e' definita da

$$A^p = \begin{array}{lr} A\ A\ \cdots\ A \quad (p\ volte) & per\ p > 0 \\ \\ I_n & per\ p = 0 \\ \\ A^{-1}\ A^{-1}\ \cdots\ A^{-1} \quad (-p\ volte) & per\ p < 0 \end{array} ;$$

le potenze con esponente negativo sono dunque definite solo per matrici invertibili.

Esempio:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Valgono le usuali proprieta' delle potenze:

$A^p A^q = A^{p+q}$;

$(A^p)^q = A^{pq}$;

la proprieta'

$(AB)^p = A^p B^p$

vale sotto al condizione che A e B siano permutabili, cioe' $AB = BA$.