Matematica II, 26.11.10

1. **Problema**

   Siano C_1 e C_2 due citta'. Consideriamo, a partire da un certo anno i numeri dei residenti in C_1 e C_2. Supponiamo che per un certo periodo, nel passaggio da ciascun anno al'anno successivo i numeri dei residenti in C_1 e C_2 varino secondo la seguente legge:

   - l' 80% dei residenti in C_1 mantengono la residenza in C_1, e il restante 20% dei residenti in C_1 prendono residenza in C_2;
   - il 30% dei residenti in C_2 prendono residenza in C_1, e il restante 70% dei residenti in C_2 mantengono la residenza in C_2;

   Ci chiediamo come evolvera' nel tempo la distribuzione degli abitanti nelle due citta'.

   Indichiamo con $x_1(t)$ il numero dei residenti in C_1 all'anno t, e con $x_2(t)$ il numero dei residenti in C_2 all'anno t, per ogni $t = 0, 1, 2, \ldots$

   La legge di variazione si puo' allora esprimere nella forma

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0.8x_1(t) + 0.3x_2(t) \\ x_2(t+1) = 0.2x_1(t) + 0.7x_2(t) \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

   oppure, nel formalismo matriciale,

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

   o, sinteticamente,

$$x(t+1) = Mx(t).$$

   Osserviamo che

   $x(1) = Mx(0)$

   $x(2) = Mx(1) = M^2x(0)$

   $\vdots$

   $x(t) = Mx(t-1) = M^tx(0)$

   $\vdots$

   Il problema di determinare l'evoluzione della distribuzione degli abitanti nelle due citta' si traduce nel problema di dare una formula per le potenze della matrice, e magari studiarne il limite quando l'esponente tende a $+\infty$.

2. **Matrici diagonali**

   Una matrice quadrata, come

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

nella quale tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, viene detta *matrice diagonale.* Possiamo rappresentare una qualsiasi matrice diagonale di ordine n come

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

scrivendo solo gli elementi sulla diagonale.

Si verifica che premoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna riga r'_i di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_1 \\ \hline r'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline r'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 r'_1 \\ \hline a_2 r'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n r'_n \end{bmatrix}$$

Si verifica che postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna colonna c_i di A per il corrispondente elemento diagonale a_i di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 c_1 & a_2 c_2 & \dots & a_n c_n \end{array}\right].$$

In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{bmatrix}$$

Piu' in particolare, la potenza $t-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $t-$ma sono le potenze $t-$me degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_1^t & & & \\ & a_2^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^t \end{bmatrix}$$

3. **Autovettori e autovalori - esempio**

Mostriamo ora come il calcolo delle potenze della matrice non diagonale

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.

Ci sono delle colonne sulle quali M agisce in modo particolarmente semplice: una e'

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Mu = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = u;$$

un'altra e'

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

in quanto

$$Mv = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\ v.$$

In entrambi i casi, M agisce come la moltiplicazione per un numero reale:

$$Mu = 1\ u, \qquad Mv = 0.5\ v.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} M \left[\ u \mid v\ \right] &= \left[\ Mu \mid Mv\ \right] \\ &= \left[\ \quad u \mid 0.5\ v\ \right] \\ &= \left[\ u \mid v\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$P = \left[\ u \mid v\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$MP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = \left[\ u \mid v\ \right] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare M in funzione di P e D :

$$M = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di M al calcolo delle potenze di D :

$$\begin{array}{rcl} M & = & PDP^{-1} \\ M^2 & = & PDP^{-1}PDP^{-1} = \ PDI_2DP^{-1} = \ PDDP^{-1} = \ PD^2P^{-1} \\ M^3 & = & PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\ \vdots & & \\ M^t & = & PD^tP^{-1} \\ \vdots & & \end{array}$$

Cosi' abbiamo

$$\begin{aligned} M^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & (0.5)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= ... \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} lim_{t\to\infty} M^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. **Autovettori e autovalori**

In generale, data una matrice M quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali M agisce in modo particolarmente semplice ...

Definizione *Se la matrice M quadrata di ordine n agisce su una colonna non nulla $v \in \mathbb{R}^n$ come la moltiplicazione per un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$Mv = \lambda v,$$

allora si dice che v e' un autovettore di M e che λ e' l'autovalore di M associato a v.

Se la matrice M possiede n autovettori [1] $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, cioe' se

$$Mv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Mv_2 = \lambda_2 v_2, \quad \ldots \quad Mv_n = \lambda_n v_n,$$

allora si ha

$$\begin{aligned} M \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \ \ v_n \,\right] &= \left[\, Mv_1 \mid Mv_2 \mid \ldots \ \ Mv_n \,\right] \\ &= \left[\, \lambda_1 v_1 \mid \lambda_2 v_2 \mid \ldots \ \ \lambda_n v_n \,\right] \\ &= \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \ \ v_n \,\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indichiamo con P

$$P = \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \ \ v_n \,\right]$$

la matrice quadrata di ordine n avente come colonne gli n autovettori v_i, ed indichiamo con D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale di ordine n con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.

Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$MP = PD.$$

Se capita che la matrice

$$P = \left[\, v_1 \mid v_2 \mid \ldots \ \ v_n \,\right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, [2] allora possiamo ricavare M in funzione di P e D :

[1] potrebbe non possederne alcuno.

[2] potrebbe non esistere alcuna matrice invertibile con colonne autovettori.

$$M = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di M al calcolo delle potenze di D :

$$M^t = PD^tP^{-1}.$$

5. Puo' succedere che una matrice non abbia alcun autovettore. Ad esempio, cio' capita per la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infatti, per ogni $u \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$, ed ogni λ in $\mathbb{R}$ si ha

$$Mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix},$$

e

$$\lambda u = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}.$$

Identificando coppie ordinate in $\mathbb{R}^2$ con punti del piano, si ha: il punto λu sta sulla retta per 0 e u, mentre il $Mu \neq 0$ sta sulla retta per 0 perpendicolare alla retta per 0 e u. Dunque i due punti non possono coincidere, e l'uguaglianza

$$Mu = \lambda u$$

non puo' valere.