

Matematica II 29.11.10

1. Somma di due matrici.

Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B , si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m \times n}$, detta matrice somma di A e B ed indicata con

$$A + B.$$

In simboli, si ha

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j), \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 11 & 15 \\ 14 & 18 \end{bmatrix}$$

Nel caso $m = n = 1$ abbiamo l'usuale somma di numeri reali. L'addizione di matrici in $\mathbb{R}^{m \times n}$ possiede le stesse proprietà, associativa e commutativa, dell'addizione di numeri reali. Il ruolo che il numero zero gioca per l'addizione di numeri reali, per le matrici in $\mathbb{R}^{m \times n}$ è giocato dalla matrice nulla

$$0_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

di tipo $m \times n$, nel senso che

$$0_{m,n} + A = A = A + 0_{m,n}, \quad \text{per ogni } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

2. Prodotto di una matrice per un numero reale

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di tipo $m \times n$, e dato uno scalare r in \mathbb{R} , moltiplicando ciascun elemento di A per lo scalare r si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m \times n}$, detta matrice prodotto della matrice A per lo scalare r , ed indicata con

$$rA.$$

In simboli, si ha

$$(rA)(i, j) = rA(i, j) \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Esempio:

$$7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione o la postmoltiplicazione di A per opportune matrici.

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix} &= 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In generale, la moltiplicazione di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione di A per la matrice rI_m oppure come la postmoltiplicazione di A per la matrice rI_n :

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

Per questa ragione, le matrici rI vengono dette *matrici scalari*.

3. L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{aligned} (A + B)C &= AC + BC \\ B(C + D) &= BC + BD \end{aligned}$$

per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.

Le operazioni di prodotto di matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice sono legate dalla proprieta'

$$r(PQ) = (rP)Q = P(rQ)$$

per ogni P, Q matrici moltiplicabili ed ogni scalare r .

4. Espressioni matriciali

Il calcolo delle espressioni matriciali puo' essere sviluppato in analogia col calcolo delle usuali espressioni algebriche, ma solo fino a un certo punto. Innanzitutto sia la moltiplicazione che l'addizione di matrici non sono sempre definite, poi la moltiplicazione non possiede la proprieta' commutativa.

Cio' comporta, ad esempio, che l'identita'

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

valida per a, b variabili reali, non lo e' piu' per variabili matriciali. Infatti per A, B matrici quadrate dello stesso ordine si ha

$$(A + B)(A - B) = (A + B)A - (A + B)B = A^2 + BA - AB - B^2,$$

e AB e BA in generale non si elidono.

5. Matrice trasposta

Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con

$$A^T.$$

In simboli, si ha:

$$A^T(i, j) = A(j, i), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Ad esempio, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Una matrice (quadrata) che coincide con la propria trasposta si dice "matrice simmetrica". In altri termini: la matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ e' simmetrica se $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Le generiche matrici simmetriche quadrate del secondo ordine e del terzo ordine sono del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

6. L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

$$(A^T)^T = A,$$

per ogni matrice A ;

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

$$(AB)^T = B^T A^T$$

per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

$$(rA)^T = rA^T$$

per ogni matrice A ed ogni scalare r .

Dimostriamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

$$(AB)^T = B^T A^T$$

e' consistente, cioe' che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti, da un lato, la matrice AB e' definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)^T$ ha tipo $p \times m$; dall'altro, la matrice B^T ha tipo $p \times n$, la matrice A^T ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^T A^T$ e' definita ed ha tipo $p \times m$.

Proviamo ora che

$$(AB)^T(i, j) = (B^T A^T)(i, j), \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned} (AB)^T(i, j) &= (AB)(j, i) \\ &= \sum_{h=1}^n A(j, h)B(h, i), \end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\begin{aligned} (B^T A^T)(i, j) &= \sum_{h=1}^n B^T(i, h)A^T(h, j) \\ &= \sum_{h=1}^n B(h, i)A(j, h), \end{aligned}$$

e i due risultati sono uguali per la proprietà commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Per finire, osserviamo che una matrice quadrata A è invertibile se e solo se la sua trasposta A^T è invertibile, inoltre l'inversa della trasposta è la trasposta dell'inversa:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Ad esempio, da

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

segue

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo questa proprietà. " A è invertibile ed ha inversa B " significa che $AB = I = BA$;

trasponendo ciascun membro di queste uguaglianze, otteniamo

$$(AB)^T = I^T = (BA)^T,$$

da cui otteniamo

$$B^T A^T = I = A^T B^T;$$

queste ultime uguaglianze significano che " A^T è invertibile ed ha inversa B^T ".

Determinanti, del secondo ordine

1. Sia n un intero positivo fissato. Data una matrice A quadrata di ordine n

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n},$$

consideriamo i sistemi lineari

$$Ax = b \quad (b \in \mathbb{R}^n)$$

aventi matrice dei coefficienti A . Possiamo chiederci sotto quali condizioni sugli elementi a_{ij} di A succede che tutti i sistemi sono determinati, e in tale caso se c'è una formula che esprima la soluzione del sistema in funzione degli elementi a_{ij} di A e degli elementi b_i di b . A queste domande si può dare risposta attraverso il concetto di determinante.

2. Per $n = 1$, una matrice quadrata di ordine 1 consiste di un solo elemento

$$A = [a],$$

e le equazioni lineari

$$ax = b$$

con coefficiente a sono determinate se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l'unica soluzione è data da $x = \frac{b}{a}$.

Definiamo il determinante $DetA$ di A ponendo:

$$DetA = Det[a] = a.$$

3. Per $n = 2$, data la matrice quadrata del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

consideriamo i sistemi lineari

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti A . Supponiamo, per semplicità, che $a \neq 0$.

Sottraendo dalla seconda equazione la prima moltiplicata per $\frac{c}{a}$, si ottiene l'equazione

$$cx + dy - \frac{c}{a}(ax + by) = q - \frac{c}{a}p,$$

cioè

$$(ad - bc)y = aq - cp.$$

Se $ad - bc \neq 0$, allora da questa equazione si può ricavare in modo univoco la y , sostituire nella prima e ricavare in modo univoco la x , e il sistema è determinato. Se $ad - bc = 0$, allora questa equazione è impossibile o identicamente soddisfatta, e il sistema è impossibile o indeterminato.

Definiamo il determinante $DetA$ di A ponendo:

$$DetA = Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

Si osservi che

$$DetA^T = DetA;$$

inoltre, si ha

$$Det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

4. Possiamo parametrizzare una matrice del secondo ordine con 4 numeri in \mathbb{R} , ma anche con 2 vettori colonna in $\mathbb{R}^{2 \times 1}$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] = [a \mid b], \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

Siamo così condotti a riguardare il determinante di una matrice del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^{2 \times 1}$:

$$DetA = Det [a \mid b], \quad a, b \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del secondo ordine è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$Det [a + b \mid c] = Det [a \mid c] + Det [b \mid c]$$

$$Det [ra \mid c] = r Det [a \mid c]$$

$$Det [a \mid b + c] = Det [a \mid b] + Det [a \mid c]$$

$$Det [a \mid rb] = r Det [a \mid b]$$

$$Det [a \mid a] = 0$$

$$Det [b \mid a] = -Det [a \mid b]$$

per ogni a, b, c vettori colonna in $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ ed ogni scalare r in \mathbb{R} .

Ad esempio, la seconda proprietà si può verificare così:

$$\begin{aligned} Det [ra \mid b] &= Det \begin{bmatrix} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= ra_1 b_2 - ra_2 b_1 = r (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= r Det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\ &= r Det [a \mid b]. \end{aligned}$$

La penultima proprieta' si verifica immediatamente:

$$\text{Det} [a \mid a] = \text{Det} \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0.$$

5. Data la matrice A del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = [a \mid b],$$

consideriamo il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = p_1 \\ a_2 x + b_2 y = p_2 \end{cases},$$

con matrice dei coefficienti A . Questo sistema si puo' riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

e sintetizzare nella forma

$$ax + by = p, \quad a, b, p \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

Osserviamo che una soluzione del sistema deve essere anche una soluzione dell'equazione

$$\text{Det} [ax + by \mid b] = \text{Det} [p \mid b],$$

al cui primo membro si ha

$$\begin{aligned} \text{Det} [ax + by \mid b] &= \text{Det} [ax \mid b] + \text{Det} [by \mid b] \\ &= x \text{Det} [a \mid b] + y \text{Det} [b \mid b] \\ &= x \text{Det} [a \mid b]. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x

$$x \text{Det} [a \mid b] = \text{Det} [p \mid b],$$

e in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$y \text{Det} [a \mid b] = \text{Det} [a \mid p].$$

Se $\text{Det} A \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente entrambe le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x &= \frac{\text{Det} [p \mid b]}{\text{Det} [a \mid b]} \\ y &= \frac{\text{Det} [a \mid p]}{\text{Det} [a \mid b]}. \end{aligned}$$

Si verifica che questa e' davvero una soluzione. Esplicitamente, si ha

$$\begin{aligned}x &= \frac{p_1 b_2 - p_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\y &= \frac{a_1 p_2 - a_2 p_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.\end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto la *regola di Cramer* per la risoluzione dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

Consideriamo, ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} 5x + 6y = 10 \\ 7x + 9y = 11 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti e'

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = 5 \cdot 9 - 7 \cdot 6 = 3,$$

dunque possiamo applicare la regola di Cramer: il sistema e' determinato, e la sua soluzione e' data da

$$\begin{aligned}x &= \frac{\text{Det} \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}}{\text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}} = \frac{24}{3} = 8 \\y &= \frac{\text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}}{\text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}} = \frac{-15}{3} = -5.\end{aligned}$$