Matematica II, 03.12.10

1. **Definizione.**

   Definiamo il determinante di una matrice quadrata di un qualsiasi ordine $n \geq 1$ in modo ricorsivo. Per $n = 1$, poniamo

   - per ogni matrice $[a_{11}]$ di ordine 1,
   $$|a_{11}| \; = \; a_{11};$$

   Per $n > 1$, supponiamo di avere definito il determinante per una qualsiasi matrice di ordine $n-1$, e definiamo il determinante $|a_{ij}|_{i,j=1,\dots,n}$ per una qualsiasi matrice $[a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ di ordine n, come la somma a segni alterni $+,-,+,\dots$ di n termini, dove ciascun termine e' il prodotto di un elemento della prima colonna per il determinante della matrice ottenuta cancellando la riga cui l'elemento appartiene e la prima colonna. In simboli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ & & & & & \\ a_{i+1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   Da questa definizione si puo' ricavare la formula esplicita

$$|a_{ij}|_{i,j=1,\dots,n} = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} sg(i_1,i_2,\dots,i_n) \; a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

   dove la sommatoria e' estesa a tutte le permutazioni $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ della $n-$pla $(1, 2, \dots, n)$, e $sg(i_1, i_2, \dots, i_n)$ vale $+1$ o -1 secondo che il numero delle inversioni di $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ sia pari o dispari. Cosi', il determinante di una matrice di ordine n e' un polinomio omogeneo di grado n negli elementi della matrice, costituito da $n!$ termini.

   Si prova che

- il determinante di una matrice coincide col determinante della sua trasposta.

2. Per una matrice triangolare si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

   Dunque, il determinante di una matrice triangolare e' il prodotto dei suoi elementi diagonali. Tale determinate e' diverso da zero se e soltanto se tutti gli elementi diagonali sono diversi da zero, cioe' la matrice triangolare e' nondegenere.

   Il determinante della matrice I_n unita' di ordine n vale 1.

3. **Proprieta' dei determinanti.**

   Sia n un intero positivo arbitrariamenente fissato. Il determinante della generica matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ quadrata di ordine n puo' essere visto come una funzione

$$\mathrm{Det}\,[a_1, \dots, a_j, \dots, a_n]$$

   delle n colonne $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ di A.

   Come tale, il determinante e' caratterizzato dalle seguenti proprieta'

   - Se tre matrici sono uguali, tranne che una colonna della prima matrice e' la somma delle corrispondenti colonne delle altre due, allora il determinante della prima matrice e' la somma dei determinanti delle altre due; in simboli: per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\mathrm{Det}\left[a_1, \dots, a_{j-1}, a_j' + a_j'', a_{j+1}, \dots, a_n\right]$$
$$= \mathrm{Det}\left[a_1, \dots, a_{j-1}, a_j', a_{j+1}, \dots, a_n\right] + \mathrm{Det}\left[a_1, \dots, a_{j-1}, a_j'', a_{j+1}, \dots, a_n\right];$$

   - Se due matrici sono in tutto uguali, tranne che una colonna della prima matrice e' r $(\in \mathbb{R})$ volte la corrispondente colonna dell'altra, allora il determinante della prima matrice e' r volte il determinante dell'altra; in simboli: per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\mathrm{Det}\,[a_1, \dots, a_{j-1}, ra_j, a_{j+1}, \dots, a_n] = r\mathrm{Det}\,[a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n];$$

- Se una matrice ha due colonne uguali, allora il determinnte della matrice e' nullo; in simboli: per ogni $1 \leq i < j \leq n$ si ha

$$\text{Det}\,[a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n] = 0;$$

- Scambiando due colonne di una matrice, il determinante della matrice cambia segno; in simboli: per ogni $1 \leq i < j \leq n$ si ha

$$\begin{aligned}&\text{Det}\,[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\ &\qquad\qquad = -\text{Det}\,[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n]\,.\end{aligned}$$

Valgono analoghe proprieta' per le righe.

4. **Regola di Cramer.**

I determinanti permettono di dare una formula per la risoluzione di un sistema lineare "quadrato." Sia data una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_1, \ldots, a_n]$$

quadrata di ordine n, con $\text{Det}(A) \neq 0$. Allora tutti i sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad \textit{in breve} \quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

con matrice dei coefficienti A sono determinati; inoltre

$$x_i = \frac{\text{Det}\,[a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n]}{\text{Det}\,[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n]}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

5. **Matrice inversa.**

I determinanti permettono di dare una formula per la matrice inversa. Sia $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ la generica matrice di ordine $n > 1$. Per ciascuna scelta di un indice di riga $i = 1, \ldots, n$ e di un indice di colonna $j = 1, \ldots, n$, cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna di A otteniamo una sottomatrice di ordine $n-1$. Il determinante di questa sottomatrice, preso col suo segno o col segno opposto secondoche $i+j$ sia pari o dispari, viene detto *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} della matrice A e viene indicato col simbolo A_{ij}. In simboli, si ha

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{1+1,1} & \ldots & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si prova che, se $\text{Det}(A) \neq 0$, allora A e' invertibile; inoltre, l'inversa di A e' il prodotto del reciproco del determinante di A per la trasposta della matrice dei coplementi algebrici di A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

6. **Determinanti, operazioni elementari e algoritmo di Gauss.**

   Le proprieta' del determinate ci permettono di descrivere l'effetto che ciascuna delle operazioni elementari sulle righe di una matrice ha sul determinante della matrice:

   - l'operazione di moltiplicare una riga per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha come effetto di moltiplicare il determinante per r;
   - l'operazione di scambiare due righe ha come effetto di cambiare il segno del determinante;
   - l'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga lascia invariato il determinante.

   Grazie a queste proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica A trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare T, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di T, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

   Da cio' segue

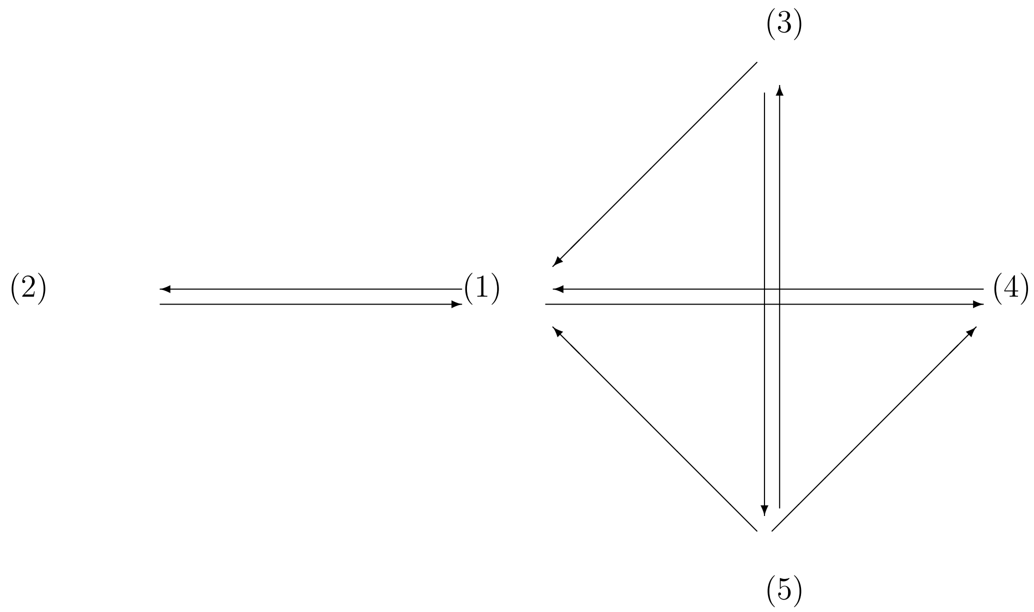
   - Sia A una matrice quadrata, che viene trasformata dall'algoritmo di Gauss in una matrice triangolare T. Si ha che $\text{Det}(A) \neq 0$ se e solo se T e' non degenere.

Riassunto dei risultati finora presentati.

Per una qualsiasi matrice quadrata A, consideriamo le seguenti proprieta'

1. ciascun sistema $Ax = b$ avente matrice dei coefficienti A e' determinato;
2. il sistema omogeneo $Ax = 0$ avente matrice dei coefficienti A e' determinato;
3. l'algoritmo di Gauss trasforma A in una matrice triangolare superiore T non degenere;
4. A possiede inversa A^{-1};
5. $\text{Det}(A) \neq 0$.

Possiammo riassumere gran parte dei risultati finora presentati nel diagramma seguente. Ciascuna freccia sta per un teorema, ad esempio la freccia che va dalla (5) verso la (1) sta per il teorema "se $\mathrm{Det}(A) \neq 0$, allora ciascun sistema $Ax = b$ avente matrice dei coefficienti A e' determinato" (regola di Cramer).



Da questo quadro emerge che le proposizioni (1), (2), (4) sono equivalenti, che le proposizioni (3), (5) sono equivalenti, e che ciascuna delle proposizioni (3), (5) implica ciascuna delle proposizioni (1), (2), (4).

In realta' si prova che le proposizioni (1), (2), (3), (4), (5) sono tutte equivalenti. Dunque, se per una certa matrice A una di esse e' vera, allora sono vere tutte le altre, e se per una certa matrice A una di esse e' falsa, allora sono false tutte le altre.

Una matrice che soddisfi una (e dunque tutte) queste condizioni si dice *matrice non singolare*.

Osserviamo che in particolare si ha il teorema

> *"per una qualsiasi matrice quadrata A, il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se* $\mathrm{Det}(A) = 0$*,"*

che risulta fondamentale per la teoria degli autovalori.

Autovalori e autovettori

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Ricordiamo che un vettore colonna non nullo $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ si dice autovettore di A se A agisce su v come la moltiplicazione per uno scalare:
$$Av = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

lo scalare λ si dice autovalore di A associato all'autovettore v. Uno scalare si dice autovalore di A se e' l'autovalore associato a qualche autovettore di A.

Osserviamo che a ciascun autovettore e' associato un solo autovalore. Infatti, se λ e μ sono entrambi autovalori associati ad uno stesso autovettore v di A, cioe' se

$Av = \lambda v, \qquad Av = \mu v,$

allora si ha l'uguaglianza

$\lambda v = \mu v,$

che si puo' riscrivere nella forma

$(\lambda - \mu)v = 0,$

che a sua volta, poiche' $v \neq 0$, implica

$\lambda - \mu = 0, \qquad cioe' \qquad \lambda = \mu.$

2. Riconsideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix},$$

che possiede un autovettore $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ con autovalore associato $\lambda = 1$:

$$Au = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot u;$$

e possiede un autovettore $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con autovalore associato $\lambda = 0.5$:

$$Av = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \cdot v.$$

3. Iniziamo a chiederci come si possano ricavare degli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 1$. Tali autovettori sono i vettori colonna $x \neq 0$ caratterizzati dalla condizione

$Ax = x,$

che si puo' riscrivere

$Ax - x = 0_2,$

o

$Ax - I_2 x = 0_2,$

o

$(A - I_2)x = 0_2.$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che si riduce alla sola equazione lineare omogenea

$$-0.2x_1 + 0.3x_2 = 0.$$

Ora, le soluzioni di questa equazione sono del tipo

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2}x_2 \\ x_2 = \ qualsiasi \end{array}.$$

Questi vettori, con $x_2 \neq 0$, sono tutti e soli gli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 1$; in particolare, per $x_2 = 2$ ritroviamo l'autovettore u.

4. Ci chiediamo ora come si possono determinare gli autovalori di A. Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono in $\mathbb{R}^2$ dei vettori non nulli $x \neq 0$ che soddisfano la condizione

$$Ax = \lambda x,$$

che si puo' riscrivere

$$Ax - \lambda x = 0,$$

o

$$Ax - \lambda I_2 x = 0,$$

o

$$(A - \lambda I_2)x = 0.$$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 0.8-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 0.8-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

cioe' se e solo se λ e' soluzione dell'equazione di secondo grado

$$(0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.3 \cdot 0.2 = 0,$$

cioe'

$$\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.5 = 0.$$

Ora, le soluzioni di questa equazione sono

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0.5.$

Abbiamo cosi' ritrovato i due autovalori della matrice A che sono associati agli autovettori u e v; possiamo inoltre affermare che A non possiede altri autovalori al di fuori di 1 e 0.5.

5. Sia ora A una matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $x \neq 0$ che soddisfano la condizione

$Ax = \lambda x,$

che si puo' riscrivere

$Ax - \lambda x = 0,$

o

$Ax - \lambda I_n x = 0,$

o

$(A - \lambda I_n)x = 0.$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I_n) = Det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Il polinomio che compare al primo membro di questa equazione e' detto *polinomio caratteristico* della matrice A; e' un polinomio di grado n pari all'ordine della matrice.

Possiamo dunque infine dire che

- gli autovalori di una matrice A di ordine n sono le radici del polinomio caratteristico di A.