Matematica II 06.12.10

Vettori, indipendenza lineare, dimensione

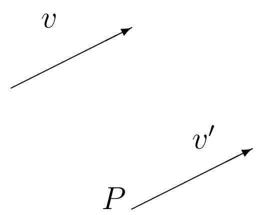
Vettori nello spazio

In Cinematica, uno dei primi concetti e' quello di spostamento, a partire dal quale si definiscono velocita' e accelerazioni. Gli spostamenti sono esempi di "vettori." Fino ad avviso contrario, tutte le considerazioni seguenti si svolgono nell'ambito dello spazio ordinario, intuitivamente inteso. Il tono della presentazione sara' informale.

1. **Vettori**

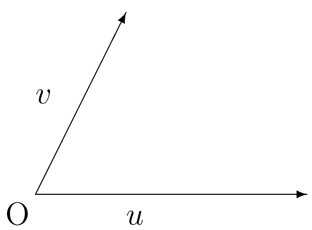
   Col termine "vettore" intendiamo un segmento con un verso di percorrenza privilegiato, avente cosi' un primo estremo ed un ultimo estremo. Rappresentiamo ciascun vettore con con una freccia avente origine nel primo estremo e punta nel secondo estremo.

   Diciamo che due vettori sono *equivalenti* quando hanno la stessa direzione, lunghezza, e verso. Dato un vettore v e un punto P, si ha che c'e' uno ed un solo vettore v' che ha origine in P ed e' equivalente a v.



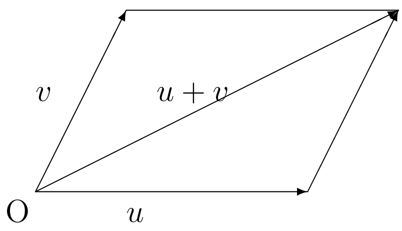
2. **Vettori con origine in un punto fissato**

   Fissato nello spazio un punto O, consideriamo l'insieme $\mathcal{S}_O$ dei vettori con origine in O. Dati due vettori $u, v \in \mathcal{S}_O$,



consideriamo il parallelogramma che ammette u e v come lati, e ne prendiamo la diagonale uscente da O; questo vettore viene detto 'vettore somma' dei vettori u e v, e viene indicato con

$$u + v.$$



Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa e associativa:

$u + v = v + u$,

$(u + v) + w = u + (v + w)$,

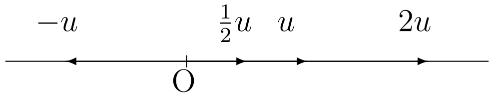
per ogni terna di vettori u, v, w.

Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore ridotto al solo punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo 0; in generale, quando questo simbolo comparira' in una espresssione, risultera' chiaro dal contesto se rappresenta il vettore nullo o il numero zero. La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni v, il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con $-v$.

3. Dato un vettore v con origine in O, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per v : per un numero intero n, si pone

$$nv = \begin{cases} v + \quad v + \cdots + \quad v & n \text{ volte} & \text{per } n = 1, 2, \ldots \\ 0 & & \text{per } n = 0 \\ (-v) + (-v) + \cdots + (-v) & -n \text{ volte} & \text{per } n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori con origine O, che fornisce un vettore con origine O, e la moltiplicazione di un vettore con origine O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore con origine O.

Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, ne' moltiplicare vettori per vettori.

L'insieme $\mathcal{S}_0$, munito di queste operazioni, viene detto *spazio vettoriale geometrico con origine* O.

4. **Combinazioni lineari**

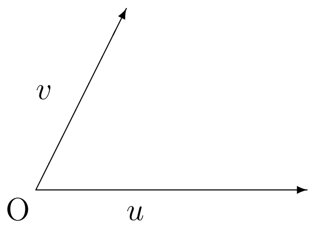
Data una sequenza di un certo numero di vettori $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathcal{S}_0$ ed una sequenza dello stesso numero di scalari $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_m v_m,$$

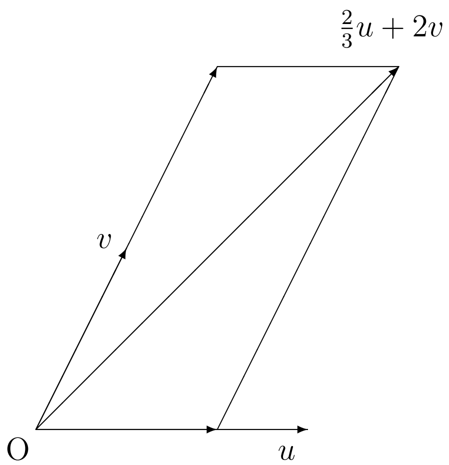
detto *combinazione lineare* dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto *coefficiente* del vettore v_i nella combinazione lineare.

Esempio

- La combinazione lineare dei vettori u, v



con coefficienti rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore



Osserviamo che

ciascuna delle combinazioni lineari

$$ru + sv, \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

dei due vettori u, v da' per risultato un vettore del piano individuato da u, v.

5. **Sottospazi.**

Ogni vettore $v \in \mathcal{S}_0$ e' univocamente determinato dalla sua punta, e percio' spesso viene identificato con essa. Cosi', l'insieme dei vettori che giacciono su una una certa retta per O viene identificato con quella retta, e l'insieme dei vettori che giacciono su una una certo piano per O viene identificato con quel piano.

L'osservazione al termine del puto precedente suggerisce la seguente

Definizione 1. *Un sottinsieme $\mathcal{V}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{S}_O$ si dice sottospazio di $\mathcal{S}_O$ se soddisfa le seguenti condizioni:*

- $0 \in \mathcal{V}$;
- *per ogni* $u, v \in \mathcal{V}$, *si ha* $u + v \in \mathcal{V}$;
- *per ogni* $u \in \mathcal{V}$ *ed ogni* $r \in \mathbb{R}$, *si ha* $ru \in \mathcal{V}$.

Esempi di sottospazi di $\mathcal{S}_0$ sono dati da

- l'insieme che contiene solo l'origine O;
- ciascuna retta per O;
- ciascun piano per O;
- l'intero spazio.

Si prova che non ci sono sottospazi di $\mathcal{S}_0$ al di fuori di questi.

Essendo questi sottospazi punti, rette, piani, e spazio, essi hanno rispaettivamente dimensione $0, 1, 2, 3$. Nei prossimi punti mostreremo come il concetto di dimensione possa essere descritto nei termini dell'algebra dei vettori.

6. **Dipendenza/Indipendenza lineare. Dimensione.**

Siano dati m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathcal{S}_0$, con $m > 1$. Si hanno due casi:

- c'e' un vettore v_i che e' combinazione lineare degli altri;
- nessun vettore v_i e' combinazione lineare degli altri.

Nel primo caso, diciamo che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono *linearmente dipendenti*; nel secondo caso, diciamo che sono *linearmente indipendenti.*

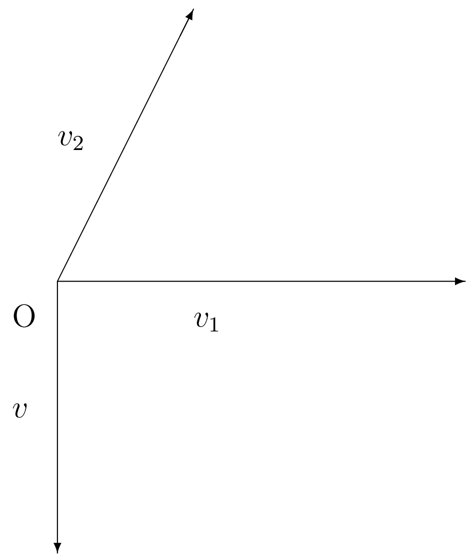
Conviene completare questa definizione considerando anche il caso $m = 1$. Se un vettore e' uguale al vettore nullo diciamo che e' linearmente dipendente, se e' diverso dal vettore nullo, diciamo che e' linearmente indipendente.

Si ha che

> *la dimensione di un sottospazio e' uguale al massimo numero di suoi vettori linearmente indipendenti.*

Verifichiamo questa affermazione nel caso di un qualsiasi piano passante per O. Nel piano possiamo trovare vettori diversi dal vettore nullo, sia v_1 uno di essi. Sia v un vettore del piano: se v sta sulla retta individuata da v_1, allora $v = rv_1$, per un opportuno scalare r, e i vettori v_1, v sono linearmente dipendenti. Nel piano possiamo prendere un vettore v_2 che non sta sulla retta individuata da v_1; i vettori v_1, v_2 sono linearmente indipendenti. Ora, ogni altro vettore v del piano e' combinazione lineare di v_1, v_2. Dunque il massimo numero di vettori del piano linearmente indipendenti e' 2.

Per esercizio si determini una stima dei coefficienti che permettono di ottenere il vettore v come combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2.



In modo analogo si motiva il fatto che il massimo numero di vettori dello spazio linearmente indipendenti e' 3.

Interpretazione in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ delle operazioni su $\mathcal{P}_O$ e $\mathcal{S}_O$.

1. Fissato nel piano un punto O, consideriamo il piano vettoriale geometrico con origine in O, cioe' l'insieme $\mathcal{P}_O$ dei vettori del piano aventi origine in O, munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari.

   Fissata una prima retta per O con un punto privilegiato e_1 diverso da O, ed una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto privilegiato e_2 diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascun punto del piano una coppia ordinata di numeri reali, in modo che all'origine O corrisponda la coppia $(0, 0)$, al punto e_1 corrispoonda la coppia $(1, 0)$, al punto e_2 corrispoonda la coppia $(0, 1)$ Ciascun coppia di numeri reali (p, q) si ottiene in corrispondenza di uno ed un solo punto del piano, e (p, q) vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

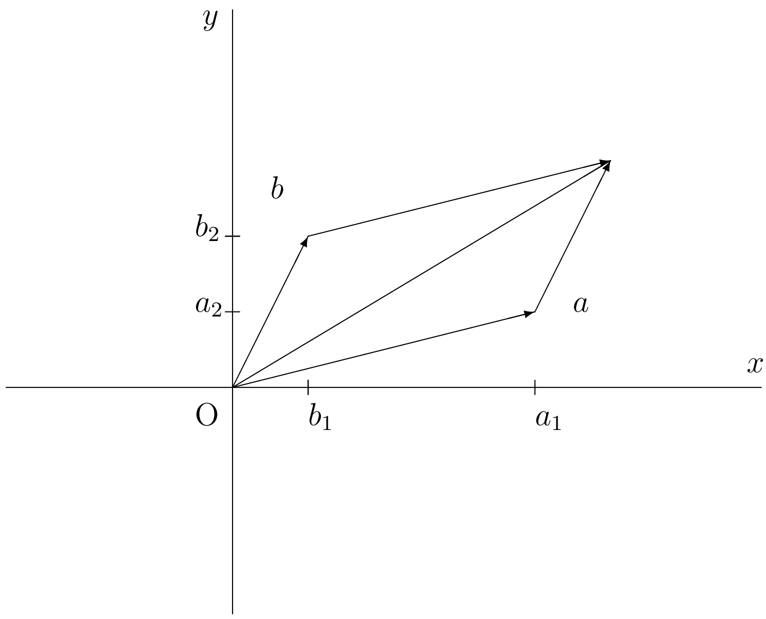
Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano ed $\mathbb{R}^2$. Identificando ciascun vettore con origine in O col suo punto finale, si ha pure una corrispondenza biunivoca fra il piano vettoriale geometrico $\mathcal{P}_O$ ed $\mathbb{R}^2$.

L'addizione di vettori in $\mathcal{P}_O$ viene allora rappresentata dall'addizione in $\mathbb{R}^2$. Precisamente, se ai vettori a, b, corrispondono le due coppie

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

allora al vettore $a + b$ somma dei vettori a e b corrisponde la coppia ordinata somma

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}.$$

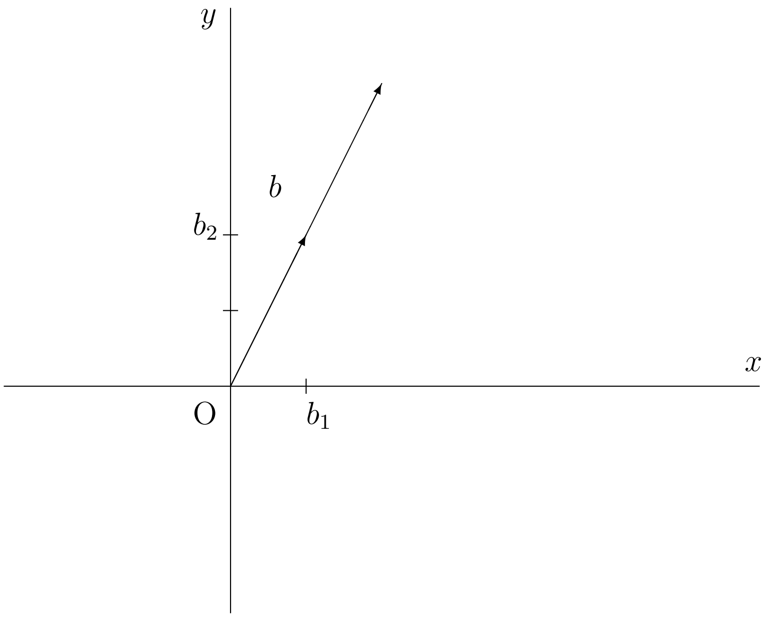


La moltiplicazione di un vettore con origine in O per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di una coppia di numeri reali per un numero reale. Precisamente, se al vettore b corrisponde la coppia

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

e se r e' uno scalare, allora al vettore ra prodotto dello scalare r per b corrisponde la coppia prodotto

$$r \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_1 \\ rb_2 \end{bmatrix}.$$



D'ora in poi identificheremo ciascun vettore $a \in \mathcal{P}_O$ con la coppia ordinata $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ delle sue coordinate:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

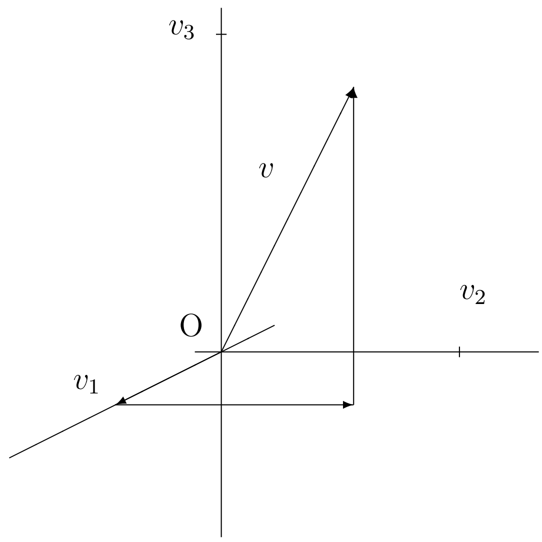
2. Fissato nello spazio un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale geometrico con origine in O, cioe' l'insieme $\mathcal{S}_O$ dei vettori dello spazio aventi origine in O, munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari.

   Fissati nello spazio una prima retta per O con un punto e_1 diverso da O, una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto e_2 diverso da O, ed una terza retta per O, ortogonale alle prime due, con un punto e_3 diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascun punto dello spazio una terna ordinata di numeri reali in modo che: all'origine O, corrisponda la terna $(0, 0, 0)$; al punto e_1 corrisponda la terna $(1, 0, 0)$; al punto e_2 corrisponda la terna $(0, 1, 0)$; al punto e_3 corrisponda la terna $(0, 0, 1)$.

   Ciascun terna (p, q, r) di numeri reali si ottiene in corrispondenza di uno ed un solo punto dello spazio, e (p, q, r) vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

   Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio ed $\mathbb{R}^3$. Identificando ciascun vettore con origine in O col suo punto finale, si ha pure una corrispondenza biunivoca fra lo spazio vettoriale geometrico $\mathcal{S}_O$ ed $\mathbb{R}^2$.

   La generica terna $v = [v_i]_{i=1}^{3}$ corrisponde ul vettore v che si puo' pensare come lo spostamento di v_1 unita' nella direzione e verso del primo asse, di v_2 unita' nella direzione e verso del secondo asse, di v_3 unita' nella direzione e verso del terzo asse, a partire dall'origine O.



L'addizione di vettori in $\mathcal{S}_O$ viene allora rappresentata dall'addizione in $\mathbb{R}^3$. Precisamente, se ai vettori a, b, corrispondono le due terne

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

allora al vettore $a+b$ somma dei vettori a e b corrisponde la terna ordinata somma

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}.$$

La moltiplicazione di un vettore con origine in O per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di una terna di numeri reali per un numero reale. Precisamente, se al vettore b corrisponde la terna

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

e se r e' uno scalare, allora al vettore ra prodotto dello scalare r per b corrisponde la terna

$$r \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_1 \\ rb_2 \\ rb_3 \end{bmatrix}.$$

D'ora in poi identificheremo ciascun vettore $a \in \mathcal{S}_O$ con la terna ordinata $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ delle sue coordinate:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

1. Sia n un intero positivo fissato. Lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

munito dell'operazione di addizione di due $n-$ple, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

e dell'operazione di moltiplicazione di una $n-$pla per un numero reale, definita da

$$r \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_1 \\ \vdots \\ ra_n \end{bmatrix}.$$

Penseremo ciascuna $n-$pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole $a, b, \ldots, v, \ldots$.

La n-pla $0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ viene detta *vettore nullo* di $\mathbb{R}^n$.

Al posto di $n-$pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di numero reale useremo il termine *scalare*.

Data una sequenza di un certo numero di vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_m a_m \in \mathbb{R}^n,$$

detto *combinazione lineare* dei vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

2. Dati in $\mathbb{R}^n$ $m + 1$ vettori

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, m; \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ci chiediamo se b e' o meno combinazione lineare degli m vettori $a_1, \ldots, a_m$. Cio' significa chiedersi se l'equazione nelle incognite scalari $x_1, \ldots, x_m$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_m a_m = b$$

ha soluzione o meno. Sostituendo ad $a_1, \ldots, a_m, b$ i loro valori, si ha

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

cioe' il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}.$$

Dunque in $\mathbb{R}^n$ la ricerca delle combinazione lineari di m vettori che risultano in un dato vettore si tradurra' sempre nella ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di n equazioni in m incognite.

Si noti che la rappresentazione matriciale del sistema e'

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

e in forma compatta

$$Ax = b,$$

dove

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & \ldots & a_m \end{array} \right].$$