Matematica II 07.12.10

1. **Dipendenza/Indipendenza lineare.**

   Definizione 1. *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$*, siano dati* m *vettori* $v_1, \ldots, v_m$*, con* $m > 1$*. Si hanno due casi:*

   - *c'e' un vettore* v_i *che e' combinazione lineare degli altri;*
   - *nessun vettore* v_i *e' combinazione lineare degli altri.*

   Nel primo caso, diciamo che i vettori $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente dipendenti; nel secondo caso, diciamo che sono linearmente indipendenti.*

   Se un vettore e' uguale al vettore nullo diciamo che e' linearmente dipendente, se e' diverso dal vettore nullo, diciamo che e' linearmente indipendente.

   Esplicitamente, i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti se c'e' un vettore v_i e ci sono $m-1$ scalari $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ tali che

   $$v_i = r_1 v_1 + \cdots + r_{i-1} v_{i-1} + r_{i+1} v_{i+1} + \cdots + r_m v_m.$$

   La locuzione "linearmente dipendenti" e' suggerita dal fatto che il vettore v_i si puo' scrivere "in funzione" degli altri vettori, "dipende" da essi.

   Esempi

   - Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$. Si ha

     $$v_1 = \frac{1}{2} v_2.$$

     Dunque v_1, v_2 sono linearmente dipendenti.

   - Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si ha

     $$v_2 = 0 v_1.$$

     Dunque v_1, v_2 sono linearmente dipendenti.

   - Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$. Non esiste alcun scalare r tale che

     $$v_1 = r v_2,$$

     e non esiste alcun scalare s tale che

     $$v_2 = s v_1.$$

     Dunque v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.

- Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Si ha
$$v_2 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3.$$
Dunque v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.
- Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Non esistono scalari r, s tali che
$$e_1 = re_2 + se_3;$$
non esistono scalari r, s tali che
$$e_2 = re_1 + se_3;$$
e non esistono scalari r, s tali che
$$e_3 = re_1 + se_2.$$
Dunque e_1, e_2, e_3 sono linearmente indipendenti.

Esempi

- Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Se uno di essi, ad esempio v_2, e' uguale al vettore nullo 0, allora si ha
$v_2 = 0v_1$,
cosi' v_1, v_2 sono linearmente dipendenti.
- Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, entrambi diversi dal vettore nullo 0. Se le componenti di v_1 sono proporzionali alle componenti di v_2, allora v_1, v_2 sono linearmente dipendenti. Se le componenti di v_1 non sono proporzionali alle componenti di v_2, alloora v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
- Siano $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$ $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, vettori in $\mathbb{R}^n$.
Sia i un indice compreso fra 1 ed n. Ci chiediamo se ci sono $n-1$ scalari $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ tali che
$$e_i = r_1e_1 + \cdots + r_{i-1}e_{i-1} + r_{i+1}e_{i+1} + \cdots + r_ne_n.$$
Prendendo ad entrambe i membri la $i-$ma componente si ha l'uguaglianza
$$1 = r_10 + \cdots + r_{i-1}0 + r_{i+1}0 + \cdots + r_n0.$$
che e' impossibile.
Dunque nessun vettore e_i e' combinazione lineare degli altri, e i vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ sono linearmente indipendenti; si dice che questi vettori formano la *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

2. Decidere se un insieme di vettori e' linearmente dipendente o linearmente indipendente usando la definizione e' piuttosto laborioso. Un utile criterio e' dato dal

   Teorema 1. *Siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori di $\mathbb{R}^n$. I vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti se e solo se esistono degli scalari $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che*
   $$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0.$$

   Dim.

   - Supponiamo che i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti. Cio' significa che uno di essi, supponiamo per semplicita' v_1, e' combinazione lineare degli altri:
   $$v_1 = s_2 v_2 + \cdots + s_m v_m.$$
   Quest'uguaglianza si puo' riscrivere nella forma
   $$v_1 - s_2 v_2 - \cdots - s_m v_m = 0.$$
   Dunque gli scalari $r_1 = 1$, $r_2 = -s_2, \ldots, r_m = -s_m$ sono non tutti nulli e
   $$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0.$$
   - Supponiamo che l'uguaglianza
   $$r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m = 0$$
   valga per certi scalari non tutti nulli $r_1, \ldots, r_m$; supponiamo per semplicita' che $r_1 \neq 0$. Possiamo ricavare v_1 come combinazione lineare
   $$v_1 = -\frac{r_2}{r_1} v_2 - \cdots - \frac{r_m}{r_1} v_m,$$
   di $v_2, \ldots, v_m$. Dunque i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti.

   Il teorema precedente e' equivalente al

   Teorema 2. *Siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori di $\mathbb{R}^n$. I vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'uguaglianza*
   $$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0, \qquad x_i \in \mathbb{R}$$
   vale solo per $x_1 = \cdots = x_m = 0$.

   Esempi

   - Vediamo come si usa il criterio sopra esposto per deciere se i vettori
   $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti. Consideriamo l'equazione

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$

nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^3$ e' equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases},$$

che ha soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = \text{ } qualsiasi \end{cases},$$

e in particolare ha la soluzione $(-1, 2, 1)$. Dunque si ha

$$-v_1 + 2v_2 + v_3 = 0;$$

Per il criterio sopra esposto, possiamo concludere che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

- Vediamo come si usa il criterio sopra esposto per deciere se i vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti o indipendenti. Consideriamo l'equazione

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = 0,$$

nelle incognite scalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^n$ e' equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}.$$

Dunque i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti.

- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo m vettori

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

e supponiamo che $m > n$. L'equazione

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = 0$$

e' equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} .$$

di n equazioni in $m > n$ incognite. Per uno dei teoremi sui sistemi lineari (cfr. Lez. III), questo sistema e' indeterminato, e cosi' ha qualche soluzione diversa dalla soluzione banale $(0, 0, \ldots, 0)$. Dunque l'equazione

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = 0$$

e' soddisfatta da una qualche $m - pla$ $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ di coeffficienti non tutti nulli. Ne concludiamo che i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sono linearmente dipendenti.

Dagli ultimi due esempi segue che

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti e' n.

3. **Sottospazi di $\mathbb{R}^n$.**

Definizione 2. *Un sottinsieme V dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si dice sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se soddisfa le seguenti condizioni:*

- $0 \in V$;
- *per ogni $u, v \in V$, si ha $u + v \in V$;*
- *per ogni $u \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, si ha $ru \in V$.*

$\mathbb{R}^n$ e l'insieme $\{0\}$ ridotto al solo vettore nullo sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$, il piu' grande e il piu' piccolo fra i sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

Nello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{S}_O$, che si puo' identificare con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si ha che i sottospazi diversi dal piu' piccolo e dal piu' grande sono le rette per O e i piani per O. Osserviamo che

- Ciascuna retta per O si puo' vedere come l'insieme

  $$\{rv;\ r \in \mathbb{R}\}$$

  dei multipli scalari di un vettore non nullo.
- Ciascun piano per O si puo' vedere come l'insieme

  $$\{r_1 v_1 + r_2 v_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

  delle combinazioni lineari di due vettori non allineati.

Questi esempi suggeriscono la seguente

Definizione 3. *Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori in $\mathbb{R}^n$. L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_m$ viene detto spazio generato da $v_1, \dots, v_m$, e viene indicato con $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$. In simboli:*

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i v_i;\ r_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'insieme $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti:

- 0 e' una combinazione lineare dei vettori v_i :
$$0 = \sum_{i=1}^{m} 0 v_i;$$
- se $u = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^{m} s_i v_i$ sono combinazioni lineari dei vettori v_i, allora anche
$$u + v = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i + \sum_{i=1}^{m} s_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (r_i + s_i) v_i$$
e' una combinazione lineare dei vettori v_i;
- se $u = \sum_{i=1}^{m} r_i v_i$ e' una combinazione lineare dei vettori v_i, ed $r \in \mathbb{R}$, allora anche
$$ru = r \sum_{i=1}^{m} r_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (r r_i) v_i$$
e' una combinazione lineare dei vettori v_i.

Ciascun v_i appartiene allo spazio $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$; infatti

$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots 0v_m$

$v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \cdots 0v_m$

$\vdots$

In realta' $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ e' il piu' piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che contiene i vettori $v_1, \dots, v_m$.

4. **Dimensione.**

Definizione 4. *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Il massimo numero di vettori di V linearmente indipendenti viene detto dimensione di V, e viene indicato con* $\dim(V)$.

Si ha che $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\{0\}) = 0$, e per ogni sottospazio V di $\mathbb{R}^n$

$$0 \leq \dim(V) \leq n.$$

Si puo' provare che per ogni $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$

$$\dim(\langle v_1, \dots, v_m \rangle) \leq m,$$

e che l'uguale vale se e soltanto se i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.