Matematica II 14.12.10

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

1. Consideriamo un'equazione lineare omogenea

   $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

   o

   $$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

   in breve

   $$a'x = 0,$$

   nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3.

   In generale, le soluzioni di questa equazione costituiscono un piano per l'origine O, cioe' un sottospazio di dimensione 2.

   C'e' un caso degenere: l'equazione

   $$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

   ha per soluzioni tutti i punti dello spazio.

2. Consideriamo un sistema lineare omogeneo di due equazioni

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R},$$

   in breve

   $$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ a_2'x = 0 \end{cases}$$

   nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3.

   In generale, le soluzioni di questo sistema costituiscono una retta per l'origine O, cioe' un sottospazio di dimensione 1.

   Ci sono dei casi "degeneri". Ad esempio, il sistema

   $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

   ha le stesse soluzioni dell'unica equazione

   $$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0,$$

   che a sua volta ha per insieme delle soluzioni un piano per O.

3. Consideriamo un sistema lineare omogeneo di tre equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R},$$

in breve

$$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ a_2'x = 0 \\ a_3'x = 0 \end{cases}$$

nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3.

In generale, questo sistema ha per soluzione solo l'origine O, cioe' un sottospazio di dimensione 0.

Ci sono dei casi "degeneri". Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

che a sua volta ha per insieme delle soluzioni una retta per O.

4. Il significato dell'espressione "in generale" in ciascuno dei punti precedenti si puo' precisare come segue:

   - Le soluzioni dell'equazione lineare omogenea

     $$a'x = 0, \qquad a \in \mathbb{R}^3$$

     costituiscono un piano per l'origine se e solo se il vettore dei coefficienti e' diverso dal vettore nullo: $a \neq 0_3$.

   - Le soluzioni del sistema lineare omogeneo

     $$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ a_2'x = 0 \end{cases}, \qquad a_i \in \mathbb{R}^3$$

     costituiscono una retta per l'origine se e solo se i vettori dei coefficienti sono diversi dal vettore nullo e non sono multipli l'uno dell'altro: $a_1 \neq 0_3$, $a_2 \neq 0_3$, e non esiste alcun scalare r tale che $a_1 = ra_2$.

   - Le soluzioni del sistema lineare omogeneo

     $$\begin{cases} a_1'x = 0 \\ a_2'x = 0 \\ a_3'x = 0 \end{cases}, \qquad a_i \in \mathbb{R}^3$$

sono costituite dalla sola origine se e solo se nessun vettore dei coefficienti e' combinazione lineare degli altri: non esistono scalari r, s tale che $a_1 = ra_2 + sa_3$; non esistono scalari r, s tale che $a_2 = ra_1 + sa_3$; non esistono scalari r, s tale che $a_3 = ra_1 + sa_2$.

In definitiva, si ha che il termine "in generale" si puo' esprimere precisamente nella forma "i vettori dei coefficienti sono linearmente indipendenti."

5. **Sistemi lineari omogenei in $\mathbb{R}^n$.**

Teorema 1. *Sia V il sottinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni:*

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} a_1' x = 0 \\ \vdots \\ a_m' x = 0 \end{cases} \right\}, \qquad a_i \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha:

- *V e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$;*
- $\dim(V) \geq n - m$;
- $\dim(V) = n - m$ *se e solo se i vettori $a_1, \ldots, a_m$ sono linearmente indipendenti.*

Verifichiamo solo che l'insieme V e' un sottospazio. E' chiaro che all'insieme V appartiene il vettore nullo $0_n \in \mathbb{R}^n$. Dati $s, t \in V$, proviamo che $s + t \in V$; ora $s, t \in V$ significa che

$$\begin{aligned} a_i' s = 0 \qquad & i = 1, 2, \ldots, m \\ a_i' t = 0 \qquad & i = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned}$$

da cui segue

$$a_i'(s + t) = a_i' s + a_i' t = 0 + 0 = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

che significa $s + t \in V$. In modo analogo si prova che se $s \in V$ e $r \in \mathbb{R}$, allora $rs \in V$.

6. **Sottospazi di $\mathbb{R}^n$.**

I sottospazi considerati nella lezione scorsa ed in questa sono tutti i possibili sottospazi, nel senso del seguente teorema, che non dimostriamo.

Teorema 2. *Ciascun sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si puo' rappresentare sia come lo spazio generato da un insieme di vettori, sia come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.*

Ortogonalita' nel piano e nello spazio

1. **Ortogonalita' nel piano.**

   Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli del piano. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Considereremo sempre vettori applicati in uno stesso punto O; dati due vettori v, w, scriveremo

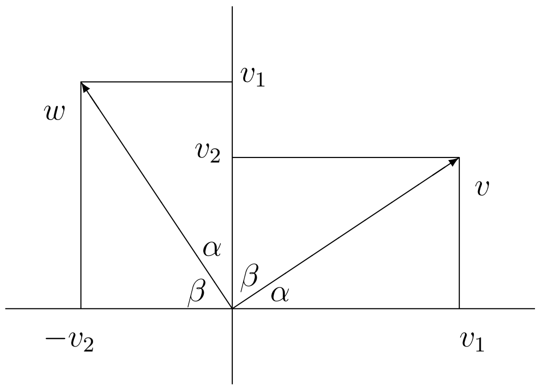
   $$v \perp w$$

   per indicare che v e w sono ortogonali.

   Osserviamo che i vettori applicati in O ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono una retta.

   Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^2$ con vettori applicati in O.

   Dato un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ci sono un paio di scelte psicologicamente naturali per un vettore ortogonale a v, una delle quali e' $w = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$.

   La scelta e' corretta. Informalmente, si puo' osservare che si vengono a formare quattro triangoli rettangoli uguali, l'angolo formato dai vettori v e w e' $\alpha + \beta$, ma $\alpha + \beta$ e' anche l'angolo formato dai due assi coordinati, che e' retto.

   I vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo

   $$wr = \begin{bmatrix} -v_2 r \\ v_1 r \end{bmatrix},$$

   dove r e' uno scalare qualsiasi.

   Osserviamo che la somma dei prodotti delle componenti del vettore v per le corrispondenti componenti del vettore wr e' sempre nulla:

   $$v_1 \cdot (-v_2 r) + v_2 \cdot (v_1 r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$a \perp b \qquad \textit{se e solo se} \qquad a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

Ora,

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a^T b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque che

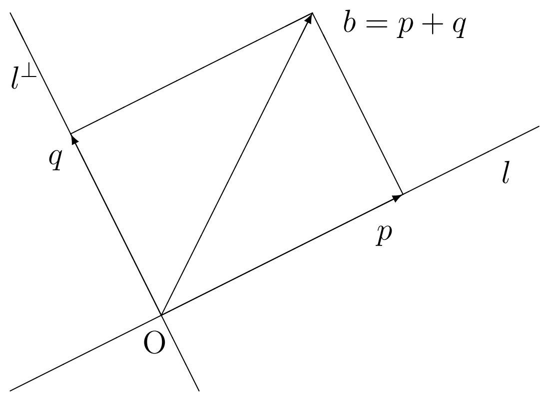
$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a^T b = 0.$$

2. **Proiezione ortogonale di un vettore su una retta, nel piano.**

   Siano dati nel piano un punto O e una retta l per O, e sia $l^\perp$ la retta per O perppendicolare ad l. Ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma

   $$b = p + q$$

   di due vettori applicati in O, un vettore p sulla retta l ed un vettore q sulla retta $l^\perp$. Diciamo che p e' la *proiezione ortogonale* di b su l, e che q e' la *proiezione ortogonale* di b su $l^\perp$.



   Vediamo ora come questa costruzione si possa effettuare algebricamente. Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine nel punto O, ed identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^2$ con vettori applicati in O. Possiamo allora descrivere la retta l come l'insieme dei vettori multipli scalari di un vettore non nullo a :

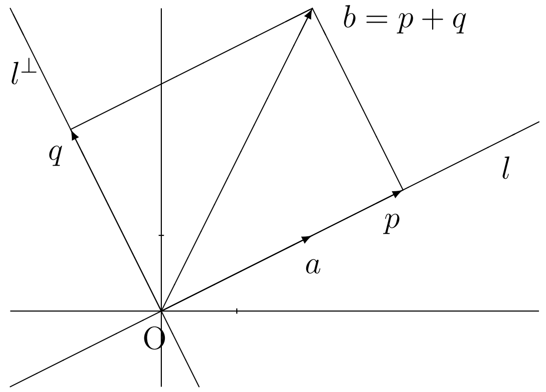
   $$l = \{ar;\ r \in \mathbb{R}\},$$

   e la retta $l^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali al vettore a :

   $$l^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ a^T x = 0\}.$$

   Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

   $$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$



Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} p + q &= b \\ p &= ar, \qquad r \in \mathbb{R} \\ a^T q &= 0, \end{aligned}$$

dove r e' uno scalare incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$ar + q = b,$$

e moltiplicando a sinistra per a^T entrambe i membri si ha

$$a^T(ar + q) = a^T b,$$

cioe'

$$a^T a\ r + a^T q = a^T b,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$a^T a\ r = a^T b.$$

Ora, questa e' un'equazione lineare nell'incognita r, e il coefficiente $a^T a$ e' diverso da 0 in quanto a e' diverso dal vettore nullo. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{a^T b}{a^T a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = ar = a\frac{a^T b}{a^T a}.$$

Lo scalare $\left(a^T b\right) / \left(a^T a\right)$ viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto al vettore a.

Nel nostro caso, si ha

$$r = \frac{a^T b}{a^T a} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{8}{5},$$

da cui

$p = ar = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{8}{5} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$

$q = b - p = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 2.4 \end{bmatrix}.$

3. **Ortogonalita', nello spazio**

Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli dello spazio. Per convenzione, stabiliamo che il vettore nullo sia ortogonale ad ogni altro vettore. Considereremo sempre vettori applicati in uno stesso punto O; dati due tali vettori v, w, scriveremo

$$v \perp w$$

per indicare che v e w sono ortogonali.

Osserviamo che i vettori applicati in O ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono un piano, e che i vettori applicati in O ortogonali a due dati vettori v, w linearmente indipendenti descrivono una retta.

Fissato nelo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ con vettori applicati in O.

Fatto

Si puo' provare che due vettori $a = [a_i]_{i=1}^3$ e $b = [b_i]_{i=1}^3$ sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Ora,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a^Tb.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque ancora che

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a^Tb = 0.$$

Noi sappiamo che, per costruzione, i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due ortogonali. Cio' si ritrova anche algebricamente, in quanto

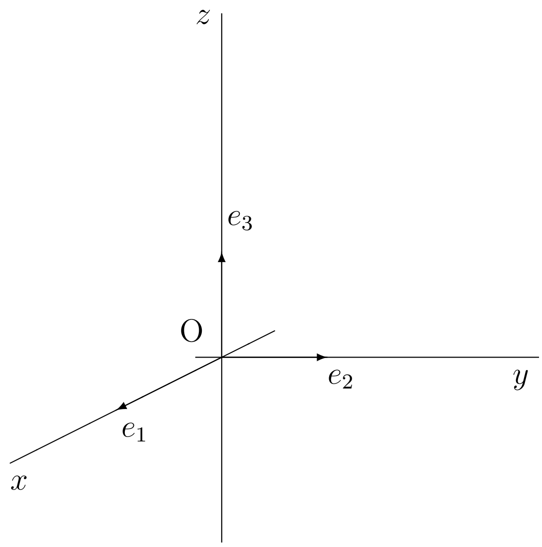
$e_1^Te_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$

$e_1^Te_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$

$e_2^Te_3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$

Possiamo anche ritrovare che i vettori che stanno sul piano xy sono ortogonali ai vettori che stanno sull'asse z. Infatti, i primi sono del tipo $a = [a_i]_{i=1}^3$ con $a_3 = 0$, i secondi sono del tipo $b = [b_i]_{i=1}^3$ con $b_1 = b_2 = 0$, e si ha

$a^Tb = a_10 + a_20 + 0b_3 = 0.$

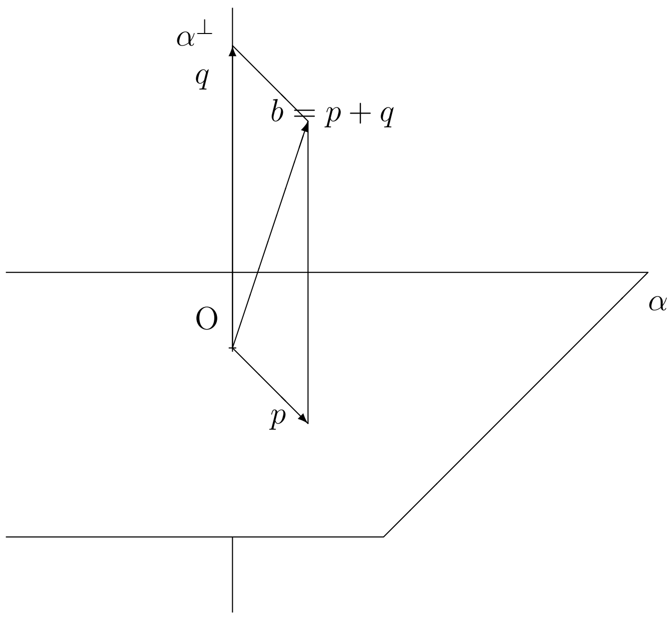


4. **Proiezione ortogonale di un vettore su un piano, nello spazio.**

   Siano dati nello spazio un punto O e un piano α per O, e sia $\alpha^\perp$ la retta per O perpendicolare ad α. Ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma

   $$b = p + q$$

   di due vettori applicati in O, un vettore p sul piano α ed un vettore q sulla retta $\alpha^\perp$. Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b sul piano α, e che q e' la proiezione ortogonale di b sulla retta $\alpha^\perp$.



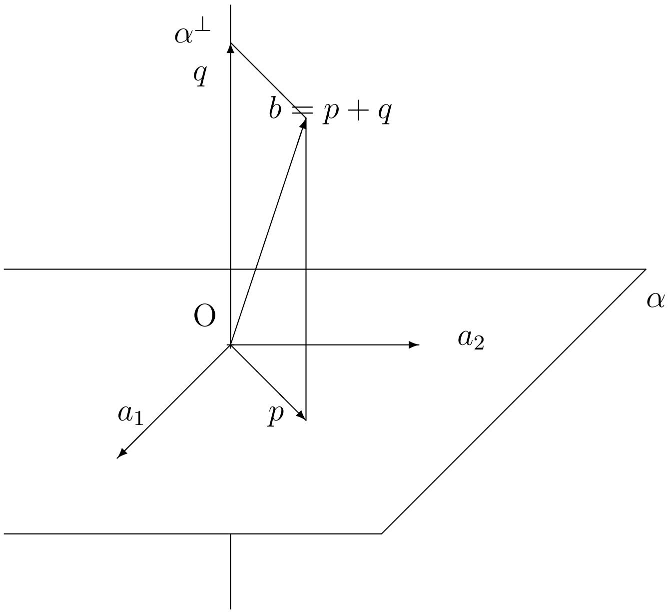
Vediamo ora come questa costruzione si possa effettuare algebricamente. Fissiamo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine nel punto O, ed identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ con vettori applicati in

O. Possiamo allora descrivere il piano α come l'insieme dei vettori combinazioni lineari di due vettori linearmente indipendenti a_1, a_2 :

$$\alpha = \{a_1 r_1 + a_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\},$$

e la retta $\alpha^\perp$ come l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori a_1, a_2 :

$$\alpha^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ a_1^T x = 0,\ a_2^T x = 0\}.$$



Prima di procedere, conviene rappresentare il piano α e la retta $\alpha^\perp$ in un modo piu' sintetico. Osserviamo che le combinazioni lineari $a_1 r_1 + a_2 r_2$ dei vettori a_1 e a_2 si possono scrivere nella forma

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix},$$

e che le condizioni di ortogonalita' $a_1^T x = 0,\ a_2^T x = 0$ ai vettori a_1, a_2 si possono riscrivere nella forma

$$\left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline a_2^T \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Percio', posto $A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right]$, ed osservato che $\left[\begin{array}{c} a_1^T \\ \hline a_2^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right]^T = A^T$, possiamo scrivere

$$\alpha = \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^2\},$$
$$\alpha^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ A^T x = 0_2\}.$$

Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned} p + q &= b \\ p &= Ar, \qquad r \in \mathbb{R}^2 \\ A^T q &= 0, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^2$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$Ar + q = b,$$

e moltiplicando a sinistra per A^T entrambe i membri si ha

$$A^T(Ar + q) = A^T b,$$

cioe'

$$A^T A\, r + A^T q = A^T b,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$A^T A\, r = A^T b.$$

Ora, la matrice quadrata $A^T A$ e' non singolare in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti (vedremo in seguito perche'). Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b,$$

dalla quale si ottiene

$$p = Ar = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

Nel nostro caso, si ha

$$\begin{aligned} r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$p = Ar = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{1}{9} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix} \frac{1}{9},$$

e

$$q = b - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix} \frac{1}{9} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} \frac{1}{9}.$$