Matematica II 15.12.10

Ortogonalita' e proiezioni ortogonali, in $\mathbb{R}^n$.

1. **Prodotto interno**

   Dati due vettori $u = [u_i]_1^n$ e $v = [v_i]_1^n$ di $\mathbb{R}^n$, possiamo considerare il numero reale dato da

   $$u'v = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_1^n u_i v_i;$$

   questo numero reale viene detto *prodotto interno* del vettore u per il vettore v. Osserviamo che scambiando i fattori il prodotto interno non cambia:

   $$v'u = \sum_1^n v_i u_i = \sum_1^n u_i v_i = u'v;$$

   percio' potremo dire "prodotto interno fra u e v," ed usare indifferentemente la forma $u'v$ o la forma $v'u$.

   Dalle proprieta' delle operazioni nell'algebra delle matrici, discendono le seguenti proprieta' del prodotto interno:

   $$\begin{aligned} (u+v)'w &= u'w + v'w \\ (ur)'w &= r(u'w) \\ u'(v+w) &= u'v + u'w \\ u'(wr) &= (u'w)r, \end{aligned}$$

   per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$.

   A parole, il prodotto interno di due vettori e' la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei due vettori. Osserviamo che il prodotto interno di un vettore con se' stesso e' la somma dei quadrati delle sue componenti:

   $$u'u = \sum_1^n u_i^2,$$

   dunque esso e' sempre maggiore-uguale a zero, ed e' zero se e solo se tutte le compnenti sono nulle, cioe' il vettore e' il vettore nullo:

   $$\begin{array}{lcl} u'u \geq 0, & & \forall u \in \mathbb{R}^n \\ u'u = 0, & \Leftrightarrow & u = 0_n \end{array}$$

   Per ciascun vettore non nullo $u = [u_i]_1^n$ e ciascun vettore $v = [v_i]_1^n$, il numero reale dato dal rapporto fra il prodotto interno $u'v$ di u e v e il prodotto interno $u'u$

di u con se' stesso viene detto *coefficiente di Fourier di v rispetto ad u*, e viene indicato con $cf(v,u)$. Cosi' si ha

$$cf(v,u) = \frac{u'v}{u'u} = \frac{\sum_1^n u_i v_i}{\sum_1^n u_i^2}.$$

2. **Ortogonalita'**

   Se il prodotto interno fra due vettori u e v di $\mathbb{R}^n$ e' zero, diciamo che il vettore u e' *ortogonale* al vettore v, e scriviamo $u \perp v$; in simboli, poniamo

   $$u \perp v \qquad \Leftrightarrow \qquad u'v = 0.$$

   Dalle proprieta' del prodotto interno segue che la relazione di ortogonalita' e' simmetrica:

   $$u \perp v \qquad \Leftrightarrow \qquad v \perp u,$$

   e segue che il vettore nullo e' l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ ortogonale a se' stesso:

   $$u \perp u \qquad \Leftrightarrow \qquad u = 0_n.$$

   Osserviamo che i vettori $e_1, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ sono a due a due ortogonali. Infatti per ogni vettore e_i ed ogni vettore $v = v = [v_i]_1^n$ si ha

   $$e_i'v = 0v_1 + \cdots + 0v_{i-1} + 1v_1 + 0v_{i+1} + \cdots + 0v_n = v_i;$$

   e cosi'

   $$e_i'e_j = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

3. **Complemento ortogonale di un sottospazio**

   Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a ciascun vettore di V e' detto *complemento ortogonale* di V, e viene indicato con $V^\perp$; in simboli:

   $$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \ v'x = 0, \ \forall v \in V\}.$$

   Il complemento ortogonale $V^\perp$ di V e' a sua volta un sottospazio di V :

   - $0_n \in V^\perp$, in quanto $v'0_n = 0$, $\forall v \in V$;
   - se $x, y \in V^\perp$, allora anche $x + y \in V^\perp$. Infatti, $x, y \in V^\perp$ significa che $v'x = v'y = 0$, $\forall v \in V$; cio' implica

     $$v'(x+y) = v'x + v'y = 0 + 0 = 0, \quad \forall v \in V,$$

     che a sua volta significa che $x + y \in V^\perp$.
   - se $x \in V^\perp$, e $r \in \mathbb{R}$, allora anche $xr \in V^\perp$. Infatti, $x \in V^\perp$ significa che $v'x = 0$, $\forall v \in V$; cio' implica

     $$v'(xr) = (v'x)r = 0r = 0, \quad \forall v \in V,$$

     che a sua volta significa che $xr \in V^\perp$.

Possiamo pensare che il sottospazio V sia un sottospazio di dimensione m, e che sia il sottospazio $V = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ generato da un certo insieme di vettori $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti. Osserviamo che

> *un vettore e' ortogonale a tutti i vettori $v \in V$ se e solo se esso e' ortogonale a tutti i vettori a_i, per $i = 1, \dots, m$.*

Cio' si puo' verificare come segue. Se x e' un vettore di $\mathbb{R}^n$ tale che $v'x = 0$ per ogni v in V, allora in particolare per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha

$$a_i'x = 0.$$

D'altro canto, se y e' un vettore di $\mathbb{R}^n$ tale che $a_i'y = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$, allora per ogni combinazione lineare $v = r_1a_1 + \cdots + r_ma_m$ dei vettori a_i si ha

$$\begin{aligned} v'y &= (r_1a_1 + \cdots + r_ma_m)'\,y \\ &= r_1(a_1'y) + \cdots + r_m(a_m'y) \\ &= r_10 + \cdots + r_m0 = 0. \end{aligned}$$

Dunque, si ha

$$\begin{aligned} V &= \{a_1r_1 + \cdots + a_mr_m;\ r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}\} \\ V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ a_i'x = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Piu' sinteticamente, posto $A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & \dots & a_m \end{array}\right]$, cosi' che $\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline \vdots \\ \hline a_m' \end{array}\right] = A^T$, si ha

$$\begin{aligned} V &= \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^m\} \\ V^\perp &= \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ A^Tx = 0_m\right\}. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che il complemento ortogonale $V^\perp$ di V, essendo l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni linearmente indipendenti, ha dimensione $n-m$. Dunque le dimensioni di V e del suo complemento ortogonale $V^\perp$ sono legate dalla relazione

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = n.$$

4. **Proiezione ortogonale**

   Sia V un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e sia $V^\perp$ il suo complemento ortogonale. Si puo' dimostrare che ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma

$$b = p + q$$

   di un vettore $p \in V$ e di un vettore $q \in V^\perp$. Il vettore p si dice *proiezione ortogonale* di b su V, e il vettore q si dice *proiezione ortogonale* di b su $V^\perp$.

La proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio si puo' determinare nel modo seguente.

Possiamo pensare che il sottospazio V sia il sottospazio $V = \mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\}$ generato da un certo insieme di vettori $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ e che questi vettori siano linearmente indipendenti.

Dunque, posto $A = \left[\ a_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_m\ \right]$, possiamo rappresentare V e $V^\perp$ nella forma

$$\begin{aligned} V &= \{Ar;\ r \in \mathbb{R}^m\}, \\ V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ A^T x = 0_m\}. \end{aligned}$$

Dato $b \in \mathbb{R}^n$, vogliamo determinare due vettori p, q che soddisfino le condizioni

$$\begin{aligned} p + q &= b \\ p &= Ar, \qquad r \in \mathbb{R}^m \\ A^T q &= 0_m, \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^m$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$Ar + q = b,$$

e moltiplicando a sinistra per A^T entrambe i membri si ha

$$A^T(Ar + q) = A^T b,$$

cioe'

$$A^T A\ r + A^T q = A^T b,$$

dalla quale, per la terza condizione, si ha

$$A^T A\ r = A^T b.$$

Ora, la matrice quadrata $A^T A$ e' non singolare in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti (vedremo in seguito perche'), e si ha una ed una sola soluzione:

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

Infine, abbiamo che il vettore p proiezione ortogonale del vettore b sullo spazio generato dalle colonne della matrice A e' dato da

$$p = Ar = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

5. **Proiezione ortogonale su sottospazi di dimensione 1**

Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio generato da un vettore $a \in \mathbb{R}^n$, diverso da 0_n. Cosi'

$$V = \{ar;\ r \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r;\ r \in \mathbb{R}\},$$

e

$$V^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a'x = 0\} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}.$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r,$$

$$a_1q_1 + \cdots + a_nq_n = 0.$$

Lo scalare r e' dato da

$$r = (a'a)^{-1}a'b = \frac{a'b}{a'a} = \frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2},$$

che e' il coefficiente di Fourier $cf(b, a)$ di b rispetto ad a.

Questo fatto suggerisce di introdurre la seguente definizione. Per ciascuna matrice A di tipo $n \times m$ con colonne linearmente indipendenti, e per ciascun vettore $b \in \mathbb{R}^n$, il vettore di $\mathbb{R}^m$ dato dalla divisione a sinistra del prodotto A^Tb per il prodotto A^TA viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto alla matrice A, e viene indicato con $cf(B, A)$. Cosi' si ha

$$cf(b, A) = \left(A^TA\right)^{-1} A^TB.$$

6. Con riferimento al punto precedente, per $a = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ si ha che

ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} r,$$

$$q_1 + \cdots + q_n = 0.$$

Lo scalare r e' dato da

$$r = \frac{a'b}{a'a} = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}.$$

Si noti che $r = \mu_b$, la media delle componenti di b.

La scomposizione del vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e' dunque

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_b \\ \vdots \\ \mu_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \mu_b \\ \vdots \\ b_n - \mu_b \end{bmatrix}.$$

7. **Proiezione ortogonale su sottospazi di dimensione 2**

Consideriamo il caso in cui V sia il sottospazio generato da due vettori $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$, linearmente indipendenti. Cosi'

$$V = \{a_1 r_1 + a_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{\left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right] r;\ r \in \mathbb{R}^2\},$$
$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a_1' x = a_2' x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array}\right] x = 0_2\}.$$

Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$b = p + q$$

dove i due vettori p, q soddisfano le condizioni

$$p = a_1 r_1 + a_2 r_2$$

$$\begin{cases} a_1' q = 0 \\ a_2' q = 0 \end{cases}.$$

La colonna r e' data da

$$r = \left(\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right] \right)^{-1} \left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array}\right] b = \begin{bmatrix} a_1' a_1 & a_1' a_2 \\ a_2' a_1 & a_2' a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1' b \\ a_2' b \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che, se i due vettori a_1 e a_2 sono ortogonali, allora si ha

$$r = \begin{bmatrix} a_1' a_1 & 0 \\ 0 & a_2' a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1' b \\ a_2' b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1' a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2' a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' b \\ a_2' b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_1' b}{a_1' a_1} \\ \frac{a_2' b}{a_2' a_2} \end{bmatrix}.$$

Dunuqe il vettore p proiezione ortogonale di b sullo spazio generato dai vettori a_1 e a_2 e' dato da

$$p = a_1 \frac{a_1' b}{a_1' a_1} + a_2 \frac{a_2' b}{a_2' a_2}$$

cioe' e' la combinazione lineare di a_1 e a_2 con coefficienti i coefficienti di Fourier di b rispetto ad a_1 e a_2.

8. Con riferimento al punto precedente, nel caso in cui

$$a_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

essendo $e_1'e_2 = 0$, la proiezione ortogonale di b su V e' data da

$$p = e_1 \frac{e_1'b}{e_1'e_1} + e_2 \frac{e_2'b}{e_2'e_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} b_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} b_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La proiezione ortogonale di b su $V^\perp$ e' data da

$$q = b - p = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$