Matematica II 15.12.10 - esercizi

1. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   - Si determinino il coefficiente di Fourier di c rispetto ad a, e la proiezione ortogonale di c sulla retta generata da a;
   - Si determinino il coefficiente di Fourier di c rispetto alla matrice $\left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array}\right]$, e la proiezione ortogonale p di c sul piano generato da a e b; si scriva p come combinazione lineare di a e b

2. Siano a_1, a_2, a_3 tre vettori non nulli in $\mathbb{R}^n$, a due a due ortogonali. Sia b il generico vettore di $\mathbb{R}^n$ e sia $p = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3$ la proiezione ortogonale di b sullo spazio generato da a_1, a_2, a_3. Si determinino i coefficienti r_1, r_2, r_3 in funzione di a_1, a_2, a_3, b.

3. Sia A una matrice di tipo $n \times m$ con colonne linearmente indipendenti, e sia

$$P = A\ (A^T A)^{-1} A^T.$$

   - Possono presentarsi tutti i casi $n < m$, $n = m$, $n > m$?
   - Qual'e' il tipo di P?
   - Si determinino le matrici P che corrispondono alle matrici

$$A = \left[\begin{array}{c} e_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \left[\begin{array}{c|c} e_1 & e_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   - Tornando al caso generale, si provi che P e' idempotente (cioe' $P^2 = P$) e simmetrica (cioe' $P^T = P$).