Matematica II 17.12.10

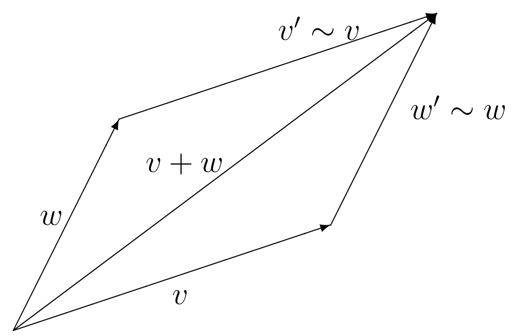
Lunghezza di un vettore

1. **Lunghezza di un vettore**

   Fissato un segmento come una unita' di misura, indicheremo la lunghezza di un vettore v del piano o dello spazio col simbolo $\|v\|$.

   La lunghezza dei vettori e' legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

   - Consideriamo due vettori v, w e il vettore $v + w$ loro somma.

     Osserviamo che un punto che partendo da O si sposta prima lungo il vettore v e poi si sposta lungo il vettore $w' \sim w$ descrive due lati di un triangolo che ammette il vettore $v + w$ come terzo lato. Ora, la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Si ha cosi' si ha disuguaglianza

     $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

     detta appunto *disuguaglianza triangolare*.

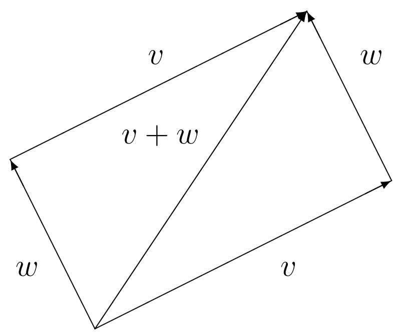
   - Consideriamo un vettore v, uno scalre r e il vettore vr multiplo di v secondo r. Allora:

     $$\|rv\| = |r|\|v\|,$$

     dove $|r|$ e' il valore assoluto di r.

   Il teorema di Pitagora puo' essere espresso nella forma seguente: se due vettori v e w sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della lunghezza del vettore somma $v+w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi v, w :

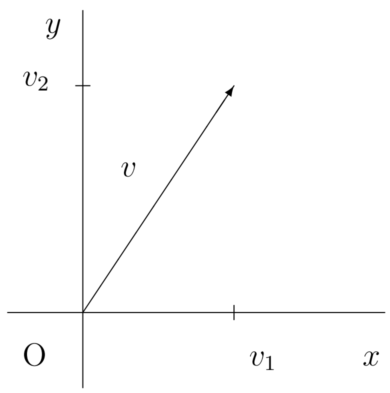
   $$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$



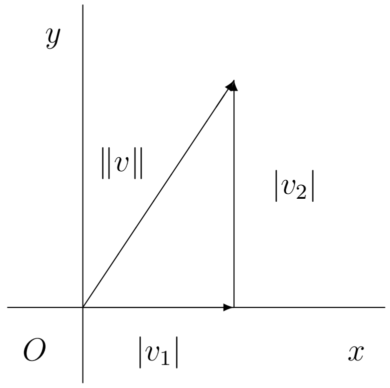
2. **Formule per la lunghezza di un vettore**

   Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O.

   Possiamo interpretare un vettore $v = [v_i]_{1=1}^2$ di $\mathbb{R}^2$ come il vettore con origine in O e termine nel punto di coordinate $(v_i)_{1=1}^2$:



   Ora, un punto che partendo da O si sposta di v_1 unita' nella direzione dell'asse x e poi si sposta di v_2 unita' nella direzione dell'asse y descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa.

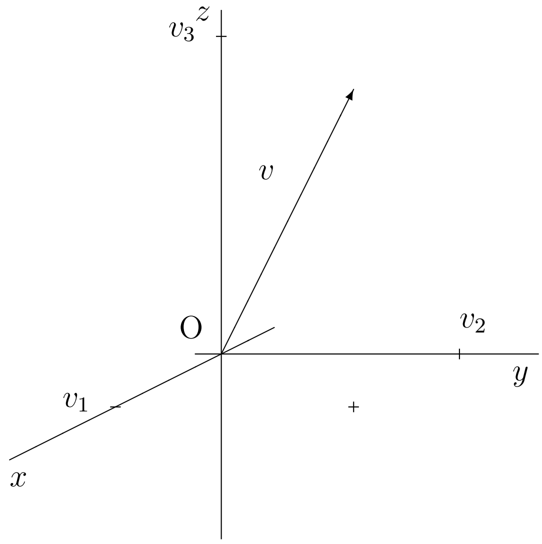


Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = [v_i]_{1=1}^2$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da

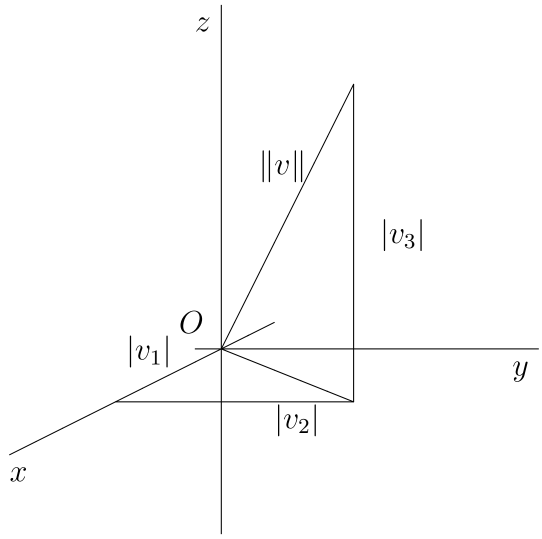
$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O.

Possiamo interpretare un vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ di $\mathbb{R}^3$ come il vettore con origine in O e termine nel punto di coordinate $(v_i)_{i=1}^3$:



Ora, un punto che partendo da O si sposta prima nel punto di coordinate $(v_1, v_2, 0)$ e poi si sposta di v_3 unita' nella direzione dell'asse z, descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa.



Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da

$$\|v\| = \sqrt{\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}^2 + |v_3|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$.

1. **Definizione**

   Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ definiamo la lunghezza $\|v\|$ di un vettore $v = [v_i]_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ ponendo
   $$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v'v}.$$
   Solitamente, al termine *lunghezza* si preferisce il termine *norma.*

   Nel caso $n = 1$ si ha che la norma di un numero reale r e' data da
   $$\|r\| = \sqrt{r^2} = |r|,$$
   il valore assoluto di r.

   Si osservi che per i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si ha
   $$\|e_1\| = \|e_2\| = \ldots = \|e_n\| = 1.$$
   Un vettore che come questi ha norma 1 si dice *versore.*

2. Un semplice conto particolarmente interessante:
   $$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= (u+v)'(u+v)\\ &= (u'+v')(u+v)\\ &= u'u + u'v + v'u + v'v\\ &= \|u\|^2 + 2u'v + \|v\|^2.\end{aligned}$$
   Nel caso in cui u e v siano perprendicolari, si ha
   $$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2,$$
   cioe' il Teorema di Pitagora.

3. Per ogni r, s numeri reali si ha $|rs| = |r||s|$. Questo fatto elementare ammette la seguente generalizzazione:

   > **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**
   > *Per ogni u, v in $\mathbb{R}^n$ si ha*
   > $$|u'v| \leq \|u\|\|v\|;$$
   > *l'uguale vale se e solo se u, v sono linearmente dipendenti.*

   Questa disuguaglianza puo' essere scritta nella forma
   $$-\|u\|\|v\| \leq u'v \leq \|u\|\|v\|$$

e, per vettori non nulli, nella forma

$$-1 \leq \frac{u'v}{\|u\|\|v\|}, \leq 1.$$

Il coseno dell'angolo formato da $u, v \neq 0$ viene definito ponendo

$$\cos\widehat{uv} = \frac{u'v}{\|u\|\|v\|}.$$

In base a questa definizione, in particolare si ha:

$$\cos\widehat{uv} = \begin{array}{rlll} 1 & se & u = tv, & con\ t > 0 \\ 0 & se & u \perp v & \\ -1 & se & u = tv, & con\ t < 0 \end{array}.$$

Si osservi che vale l'uguaglianza

$$u'v = \cos\widehat{uv}\ \|u\|\|v\|;$$

quest'uguaglianza viene solitamente usata in Fisica come definizione di prodotto interno.

4. **Proprieta'.**

   Le principali proprieta' della norma dei vettori in $\mathbb{R}^n$ sono:

   - la norma di un vettore e' sempre maggiore-uguale a zero e vale zero se e solo se il vettore e' nullo:
     $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$;
     $\|v\| = 0 \quad$ *se e solo se* $\quad v = 0_n$.
   - La norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:

     $$\|rv\| = |r|\|v\|, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

   - La norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:

     $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

     Questa disuguaglianza viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano e nello spazio.

   Dim.

   - Per definizione si ha $\|v\| = \sqrt{v'v} \geq 0$; inoltre, $\sqrt{v'v} = 0$ se e solo se $v'v = 0$, se e solo se (cfr. proprieta' del prodotto interno) $v = 0_n$.
   - Si ha

     $$\|rv\| = \sqrt{(rv)'(rv)} = \sqrt{r^2(v'v)} = |r|\sqrt{v'v} = |r|\|v\|.$$

- La disuguaglianza
$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$
e' equivalente alla disuguaglianza
$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 ,$$
in quanto sia $\|u+v\|$ che $\|u\| + \|v\|$ sono ≥ 0.
Ora si ha
$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2u'v + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 . \end{aligned}$$
Nel secondo passaggio abbiamo usato la disuuaglianza di Cauchy-Schwarz.

Per ogni vettore non nullo v in $\mathbb{R}^n$ si ha che il vettore $\frac{v}{\|v\|}$. ha norma 1. Questo vettore e' l'unico multiplo positivo di v che abbia norma 1, e si dice "versore associato a v".

5. **Esempio**

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo i vettori $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sappiamo che questi vettori formano un angolo di 45 gradi. Lo verifichiamo usando la formula data sopra:
$$\cos \widehat{e_1 v} = \frac{e_1' v}{\|e_1\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
e cosi' $\widehat{uv} = 45$ gradi.

6. **Esempio**

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Si ha
$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$;
$\|v\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77}$;
$u'v = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 12$,
da cui
$$\cos \widehat{uv} = \frac{u'v}{\|u\|\|v\|} = \frac{12}{\sqrt{14}\,\sqrt{77}} \sim 0.36549,$$
e cosi' $\widehat{uv} \sim 68.562$ gradi.