

## Matematica II, 2010-2011; Argomenti per l'esame

Le domande dell'esame verteranno sui seguenti argomenti. Per i teoremi e le proposizioni contrassegnati con \*, la dimostrazione è facoltativa.

### Sistemi lineari

1. Equazioni lineari in una incognita. Sistemi di equazioni lineari in due incognite ed intersezioni di rette nel piano; cosa ci si può aspettare in linea di massima. Sistemi di equazioni lineari in tre incognite ed intersezioni di piani nello spazio; cosa ci si può aspettare in linea di massima. Sistemi di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite; sistemi determinati, impossibili, indeterminati; metodo di risoluzione per sostituzione.
2. Matrice associata a un sistema lineare; operazioni elementari sulle righe di una matrice; matrici triangolari, matrici triangolari nondegeneri; processo di triangolarizzazione; applicazione alla risoluzione di un sistema lineare.
3. Matrici a scala; algoritmo di Gauss; discussione del generico sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite, in funzione dei pivot. Sistemi lineari omogenei. Teorema sui sistemi lineari omogenei con meno equazioni che incognite\*. Teorema sui sistemi lineari aventi una data matrice quadrata dei coefficienti\*.

### Algebra delle matrici

- Ennuple ordinate, matrici colonna, matrici riga. Prodotto di una matrice riga per una matrice colonna; rappresentazione sintetica di equazioni lineari. Matrici, tipo di una matrice; notazione Matlab. Prodotto di matrici; rappresentazione sintetica di sistemi di equazioni lineari.
- Proprietà associativa\*; mancanza della proprietà commutativa; matrici unità. Matrice inversa; unicità della matrice inversa; proprietà dell'inversione. Teorema sui sistemi lineari aventi matrice dei coefficienti invertibile. Matrici a scala ridotta; algoritmo di Gauss-Jordan. Teorema sul calcolo della matrice inversa mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan.
- Potenze (ad esponente intero relativo) di una matrice, e loro proprietà. Matrici diagonali, e loro proprietà rispetto alla moltiplicazione. Autovettori ed autovalori di una matrice; uso di autovettori ed autovalori per ricondurre il calcolo delle potenze di una matrice al calcolo delle potenze di una matrice diagonale.

- Addizione di matrici, moltiplicazione di matrici per numeri reali, e loro proprietà rispetto alla moltiplicazione di matrici. Trasposizione di matrici, e sue proprietà rispetto alle altre operazioni.

## Determinanti

- Determinante del secondo ordine: proprietà rispetto alle colonne; deduzione della regola di Cramer. Determinante del terzo ordine: sviluppo rispetto alla prima colonna; formula esplicita. Proprietà rispetto alle colonne; deduzione della regola di Cramer. Determinante e operazioni elementari sulle righe, algoritmo di Gauss per il calcolo del determinante.
- Determinante di ordine  $n$  : sviluppo rispetto alla prima colonna; formula esplicita. Proprietà del determinante. Regola di Cramer. Formula per la matrice inversa. Determinante e operazioni elementari sulle righe, algoritmo di Gauss per il calcolo del determinante. Matrici non singolari.
- Autovettori e autovalori; deduzione della condizione sotto la quale un numero reale è un autovalore di una matrice quadrata, polinomio caratteristico.

## Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

- Vettori dello spazio con origine in un punto fissato, addizione, moltiplicazione per scalari, combinazioni lineari; sottospazi, dipendenza/indipendenza lineare; dimensione di un sottospazio. Sistemi di riferimento nel piano, rappresentazione dei vettori con coppie ordinate, e delle operazioni sui vettori con operazioni sulle coppie ordinate. Sistemi di riferimento nello spazio, rappresentazione dei vettori con terne ordinate, e delle operazioni sui vettori con operazioni sulle terne ordinate.
- Spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  :  $n$  coordinate di numeri reali, addizione, moltiplicazione per scalari, combinazioni lineari; equivalenza fra la ricerca delle combinazioni lineari di  $m$  vettori dati che risultano in un vettore dato e la ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $m$  incognite. Dipendenza/indipendenza lineare; il caso di due vettori; base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ; Teorema di caratterizzazione della dipendenza/indipendenza lineare\*. Deduzione del fatto che il massimo numero di vettori di  $\mathbb{R}^n$  linearmente indipendenti è  $n$ .
- Sottospazi di  $\mathbb{R}^n$ ; sottospazio generato da un insieme di vettori; sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Dimensione di un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ ; dimensione del sottospazio generato da un insieme di vettori; dimensione del sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

## Spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

- Ortogonalità fra due vettori nel piano, e corrispondente relazione fra le loro coordinate. Proiezione ortogonale di un vettore su una retta; deduzione della relativa formula. Ortogonalità fra due vettori nello spazio, e corrispondente relazione fra le loro coordinate. Proiezione ortogonale di un vettore su un piano; deduzione della relativa formula.
- Prodotto interno di due vettori in  $\mathbb{R}^n$ , e sue proprietà; coefficiente di Fourier di un vettore rispetto ad un vettore non nullo. Ortogonalità di due vettori. Complemento ortogonale di un sottospazio; complemento ortogonale di un sottospazio generato da un insieme di vettori. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio; deduzione della relativa formula. Coefficiente di Fourier di un vettore rispetto ad una matrice.
- Lunghezza di un vettore geometrico, relazioni con le operazioni sui vettori, teorema di Pitagora. Formula per la lunghezza di un vettore nel piano e nello spazio. Norma di un vettore in  $\mathbb{R}^n$ . Deduzione del teorema di Pitagora. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, coseno dell'angolo fra due vettori non nulli. Proprietà della norma. Indipendenza lineare di un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali. Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
- Soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare; teorema sulla esistenza ed eventuale unicità delle soluzioni ai minimi quadrati; applicazione al problema dell'interpolazione.