Matematica II, 16.11.11 - II parte

1. **Equazioni lineari in n incognite.**

   Nel seguito, considereremo $n-$ple ordinate

   $$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

   di numeri reali. Per $n = 1, 2, 3$ una $n - pla$ si puo' identificare rispettivamente con un punto su una retta, un piano, o nello spazio; si vedra' che i fatti geometrici salienti della geometria dello spazio continuano a valere anche per $n > 3$: gli oggetti avranno pero' natura piu' propriamente algebrica, e cosi' anche i risultati e le loro dimostrazioni.

   Un'*equazione lineare* nelle n incognite reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' un'equazione del tipo

   $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad cioe' \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

   dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; gli a_i sono i *coefficienti* e b e' il *termine noto* dell'equazione. Una *soluzione* di questa equazione e' una $n-$pla ordinata $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali che sostituiti alle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendono vera l'uguaglianza:

   $$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

2. **Sistemi lineari in n incognite.**

   Un *sistema di m equazioni lineari* in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' una sequenza di m equazioni lineari

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

   in breve

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i *coefficienti* e i b_i sono i *termini noti* del sistema. Una *soluzione* di questo sistema e' una $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right];$$

nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita x_1 nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita x_2 nelle varie equazioni, ... nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni.

Un sistema si dice

- *impossibile* se non possiede alcuna soluzione;
- *determinato* se possiede una ed una sola soluzione;
- *indeterminato* se possiede piu' di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato in realta' possiede infinite soluzioni.

Diciamo che due sistemi lineari sono *equivalenti* quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Le *operazioni elementari* sulle equazioni del sistema (1) sono:

- moltiplicare la $h-$ma equazione per un numero reale $r \neq 0$; questa operazione trasforma la $h-$ma equazione nell'equazione

$$r \sum_{j=1}^{n} a_{hj} x_j = r b_h, \quad cioe' \quad \sum_{j=1}^{n} (r a_{hj}) x_j = r b_h;$$

- sommare alla $k-$ma equazione la $h-$ma equazione (dove $k \neq h$) moltiplicata per un numero reale r; cosi' la $k-$ma equazione viene trasformata nell'equazione

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + r\sum_{j=1}^{n} a_{hj}x_j = b_k + rb_h,$$

$$cioe' \quad \sum_{j=1}^{n}(a_{kj} + ra_{hj})x_j = b_k + rb_h$$

- scambiare la $h-$ma equazione e la $k-$ma equazione.

Le operazioni elementari trasformano un sistema in un sistema ad esso equivalente.

3. Alle operazioni elementari sulle equazioni di un sistema corrispondono delle operazioni sulla matrice del sistema; queste operazioni hanno senso per ogni matrice, come definito di seguito.

   Consideriamo una matrice con p righe e q colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix},$$

   ed indichiamo con $R_1, R_2, \dots, R_p$ le sue righe.

   Le *operazioni elementari sulle righe* della matrice sono

   - moltiplicare la $h-$ma riga per un numero reale $r \neq 0$; questa operazione trasforma la $h-$ma riga nella riga

$$\begin{bmatrix} ra_{h1} & ra_{h2} & \dots & ra_{hq} \end{bmatrix};$$

     indichiamo in breve questa operazione con

$$R_h := rR_h;$$

- sommare alla $k-$ma riga la $h-$ma riga (dove $k \neq h$) moltiplicata per un numero reale r; questa operazione trasforma la $k-$ma riga nella riga

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{k1} + r a_{h1} & a_{k2} + r a_{h2} & \dots & a_{kq} + r a_{hq} \end{array} \right];$$

indichiamo in breve questa operazione con

$$R_k := R_k + r R_h;$$

- scambiare la $h-$ma equazione e la $k-$ma equazione; indichiamo in breve questa operazione con

$$R_k := R_h, \qquad R_h := R_k.$$

Una matrice della forma

$$\left[\begin{array}{lllll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right];$$

si dice "triangolare (superiore)"; se inoltre tutti gli elementi diagonali sono non nulli, cioe'

$$a_{ii} \neq 0, \quad \forall i,$$

la matrice si dice "triangolare nondegenere."

4. **Processo di triangolarizzazione**

Il processo di triangolarizzazione prende in entrata una matrice con p righe e q colonne e, sotto una certe condizioni, restituisce in uscita una matrice con p righe e q colonne triangolare nondegenere. I passi del processo sono le operazioni elementari sulle righe. Le matrici per le quali il processo non funziona sono quelle i cui elementi annullano certi polinomi; da certi punti di vista, questo insieme e' "trascurabile". In breve, diciamo che

> Genericamente, una matrice con p righe e q colonne si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice con p righe e q colonne triangolare nondegenere.

Informalmente, il processo di triangolarizzazione si puo' descrivere come segue. Sia data uuna matrice con p righe e q colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix},$$

ed indichiamo con $R_1, R_2, R_3, \dots, R_p$ le sue righe.

Se almeno uno fra $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{p1}$ e' $\neq 0$, allora rendiamo $a_{11} \neq 0$ scambiando due righe, e annulliamo $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{p1}$ applicando le operazioni elementari

$$R_2 = R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1, \quad R_3 = R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1, \quad \dots, \quad R_p = R_p - \frac{a_{p1}}{a_{11}} R_1;$$

otteniamo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2q} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{p2} & a'_{p3} & \dots & a'_{pq} \end{bmatrix}.$$

Se almeno uno fra $a'_{22}, a'_{32}, \dots, a'_{p2}$ e' $\neq 0$, allora rendiamo $a'_{22} \neq 0$ e annulliamo $a'_{32}, \dots, a'_{p2}$ applicando opportune operazioni elementari; otteniamo cosi' una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2q} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{p3} & \dots & a''_{pq} \end{bmatrix}.$$

Iterando, sotto certe condizioni, si giunge a una matrice triangolare non degenere. Si puo' provare che queste condizioni si possono riassumere nel non annullarsi simultaneo di certi polinomi negli elementi a_{ij}.

5. **Applicazione ai sistemi lineari**

Il processo di triangolarizzazione puo' essere usato genericamente per risolvere i sistemi lineari nel modo seguente.

Dato un sistema lineare, passiamo alla corrispondente matrice; a questa matrice applichiamo il processo di triangolarizzazione, che genericamente funziona e fornisce una matrice triangolare nondegenere; da questa matrice passiamo al sistema corrispondente.

$$\begin{array}{ccc} sist. & \rightarrow & matr. \\ & & \downarrow \\ sist.\ tr. & \leftarrow & matr.\ tr. \end{array}$$

Il sistema ottenuto e' equivalente al sistema dato, ma piu' semplice: si puo' facilmente decidere se e' determinato, indeterminato o impossibile, e in tal caso determinarne le soluzioni.

- E' dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

La matrice corrispondente e'

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice il processo di triangolarizzazione si ottiene una matrice triangolare nondegenere del tipo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right],$$

dove $a'_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. A questa matrice corrisponde il sistema triangolare

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

Essendo $a'_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$, possiamo ricavare in modo univoco a partire dall'ultima equazione via via le incognite $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$. Il sistema e' determinato.

- E' dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

con $m < n$. La matrice corrispondente e'

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice il processo di triangolarizzazione si ottiene una matrice triangolare nondegenere del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2m} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{mm} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right],$$

dove $a'_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, m$. A questa matrice corrisponde il sistema triangolare

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1m}x_m + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2m}x_m + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{mm}x_m + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Essendo $a'_{ii} \neq 0\ \forall i = 1, \ldots, m$. possiamo ricavare in modo univoco a partire dall'ultima equazione via via le incognite $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$ in funzione delle incognite $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Il sistema e' indeterminato, e ci sono $n - m$ incognite libere.

- E' dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

con $m > n$. La matrice corrispondente e'

$$\left[\begin{array}{llll|l} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice il processo di triangolarizzazione si ottiene una matrice triangolare nondegenere del tipo

$$\left[\begin{array}{llll|l} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right],$$

dove $a'_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e $b'_{n+1} \neq 0$. A questa matrice corrisponde un sistema triangolare che ha come $(n+1)-$ma equazione

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b'_{n+1}.$$

Essendo $b'_{n+1} \neq 0$, questa equazione e' impossibile, e dunque anche il sistema e' impossibile.