Matematica II, 18.11.11

1. **Matrici a scala.**

   Data una riga $R = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ di numeri reali non tutti nulli, il primo elemento non nullo di R si dice *pivot* di R. Cosi', il pivot di R compare come $j-$mo elemento di R se

   $$a_1 = \ldots = a_{j-1} = 0 \quad e \quad a_j \neq 0.$$

   Una matrice nella quale il pivot della prima riga compare prima del pivot della seconda riga, che a sua volta compare prima del pivot della terza riga, ... e le eventuali righe nulle vengono per ultime, si dice *matrice a scala.*

   Un esempio:

   $$\begin{bmatrix} 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   In questa matrice, e nelle seguenti, il simbolo $\diamond$ indica un numero non nullo, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

   Le matrici a scala con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

   $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \diamond & * & * \\ 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & \diamond \end{bmatrix}$$

2. **Algoritmo di Gauss.**

   L'algoritmo di Gauss prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala con m righe ed n colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le seguenti operazioni elementari sulle righe:

   - sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
   - scambiare due righe.

   L'algoritmo di Gauss e' un perfezionamento del processo di triangolarizzazione, e funziona sempre senza eccezioni. Informalmente, il primo passo dell'algoritmo fa in modo che il pivot della prima riga compaia prima dei pivot delle righe dalla seconda in poi, il secondo passo dell'algoritmo fa in modo che il pivot della seconda riga compaia prima dei pivot delle righe dalla terza in poi, ...

3. **Applicazione ai sistemi lineari**

   Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & 5x_5 & = & 6 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & 5x_3+ & 5x_4+ & 12x_5 & = & 23 \\ 4x_1+ & 9x_2+ & 7x_3+ & 25x_4+ & 24x_5 & = & 97 \\ 8x_1+ & 27x_2+ & 5x_3+ & 125x_4+ & 18x_5 & = & 437 \end{cases}$$

   nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, cui corrisponde la matrice

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 12 & 23 \\ 4 & 9 & 7 & 25 & 24 & 97 \\ 8 & 27 & 5 & 125 & 18 & 437 \end{array}\right].$$

   Applichiamo a questa matrice l'algoritmo di Gauss.

   Facciamo in modo che il pivot della prima riga compaia prima dei pivot delle righe seguenti applicando le operazioni elementari

$R_2 = R_2 - 2R_1, \quad R_3 = R_3 - 4R_1, \quad R_4 = R_4 - 8R_1,$

ottenendo cosi'

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & -5 & 21 & 4 & 73 \\ 0 & 19 & -19 & 117 & -22 & 389 \end{array}\right].$$

Facciamo in modo che il pivot della seconda riga compaia prima dei pivot delle righe seguenti applicando le operazioni elementari

$R_3 = R_3 - 5R_2, \quad R_4 = R_4 - 19R_2,$

ottenendo cosi'

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & -60 & 180 \end{array}\right].$$

Facciamo in modo che il pivot della terza riga compaia prima del pivot della quarta riga applicando l'operazione elementare

$R_4 = R_4 - 10R_3,$

ottenendo cosi' la matrice a scala

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & 5x_5 & = & 6 \\ & x_2- & x_3+ & 3x_4+ & 2x_5 & = & 11 \\ & & & 6x_4- & 6x_5 & = & 18 \end{array}\right. ,$$

che e' equivalente al sistema dato.

Possiamo risolvere il sistema nel modo seguente: dalla terza equazione ricaviamo x_4 in funzione di x_5, nella seconda equazione sostituiamo a x_4 la sua espressione e ricaviamo x_2 in funzione di x_3, x_5, nella prima equazione sostituiamo a x_2 e x_4 le loro espressioni e ricaviamo x_1 in funzione di x_3, x_5, ottenendo cosi' una soluzione del tipo

$$\begin{cases} x_1 &= \textit{funzione di } x_3, x_5 \\ x_2 &= \textit{funzione di } x_3, x_5 \\ x_3 &= \textit{qualsiasi} \\ x_4 &= \textit{funzione di } x_5 \\ x_5 &= \textit{qualsiasi} \end{cases},$$

in altri termini

$$(f(p,q), g(p,q), p, h(q), q), \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

I conti possono essere agevolmente svolti ancora sulle matrici perfezionando l'algoritmo di Gauss, come vedremo nei punti seguenti.

4. **Matrici a scala ridotta.**

Una matrice a scala che soddisfi le ulteriori codizioni

ciascun pivot e' uguale a 1,

ciascun pivot e' l'unico elemento non nullo della sua colonna

si dice matrice *a scala ridotta.*

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici a scala ridotta con tre righe e tre colonne sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In ciascuna di queste matrici, il simbolo $*$ indica un numero qualsiasi, e lo stesso simbolo puo' indicare numeri diversi.

5. **Algoritmo di Gauss-Jordan.** L'algoritmo di Gauss-Jordan prende in entrata una qualsiasi matrice di m righe ed n colonne e restituisce in uscita una matrice a scala ridotta con m righe ed n colonne. I passi elementari dell'algoritmo sono le operazioni elementari per righe:

   - sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga;
   - scambiare due righe;
   - moltiplicare una riga per un numero reale non nullo.

   Diamo una descrizione informale dell'algoritmo. Usando le prime due operazioni elementari si trasforma la matrice data in una matrice a scala. Osserviamo che tutti gli elementi al di sotto di un pivot sono nulli. Usando la prima operazione elementare si annullano anche tutti gli elementi al di sopra di un pivot. Usando la terza operazione elementare si rendono tutti i pivot uguali a 1. La successione dei passi puo' essere impostata in vari modi, ma l'esito finale e' sempre lo stesso.

6. **Applicazione ai sistemi lineari**

   Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 + & 3x_3 + & x_4 + & 5x_5 & = & 6 \\ & x_2 - & x_3 + & 3x_4 + & 2x_5 & = & 11 \\ & & & 6x_4 - & 6x_5 & = & 18 \end{cases}$$

   nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, cui corrisponde la matrice a scala

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Applichiamo a questa matrice gli ultimi passi dell'algoritmo di Gauss-Jordan.

Rendiamo il pivot della terza uguale a 1 applicando l'operazione elementare

$R_3 = \frac{1}{6}R_3$,

ottenendo cosi'

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rendiamo il pivot della terza riga unico elemento diverso da zero della sua colonna applicando le operazioni elementari

$R_2 = R_2 - 3R_3, \quad R_1 = R_1 - R_3,$

ottenendo cosi'

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rendiamo il pivot della seconda riga unico elemento diverso da zero della sua colonna applicando l'operazione elementare

$R_1 = R_1 - R_2$,

ottenendo cosi' la matrice a scala ridotta

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1+ & & 4x_3+ & & x_5 & = & 1 \\ & x_2- & x_3+ & & 5x_5 & = & 2 \\ & & & x_4- & x_5 & = & 3 \end{array}\right.,$$

che e' equivalente al sistema dato.

Possiamo risolvere il sistema nel modo seguente: dalla terza equazione ricaviamo x_4 in funzione di x_5, dalla seconda equazione ricaviamo x_2 in funzione di x_3, x_5, dalla prima equazione ricaviamo x_1 in funzione di x_3, x_5, ottenendo cosi' la soluzione

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x_1 & = & -4x_3 - x_5 + 1 \\ x_2 & = & x_3 - 5x_5 + 2 \\ x_3 & = & qualsiasi \\ x_4 & = & x_5 + 3 \\ x_5 & = & qualsiasi \end{array} \right. ,$$

in altri termini

$$(1 - 4p - q,\ 2 + p - 5q,\ p,\ 3 + q,\ q), \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

7. **Discussione**

Consideriamo il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & 5x_5 & = & b_1 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & 5x_3+ & 5x_4+ & 12x_5 & = & b_2 \\ 4x_1+ & 9x_2+ & 7x_3+ & 25x_4+ & 24x_5 & = & b_3 \\ 8x_1+ & 27x_2+ & 5x_3+ & 125x_4+ & 18x_5 & = & b_4 \end{array} \right. ,$$

dove i termini noti b_1, b_2, b_3, b_4 sono parametri. Per la discussione svolta nei punti precedenti, questo sistema e' equivalente al sistema a scala

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & x_4+ & 5x_5 & = & b'_1 \\ & x_2- & x_3+ & 3x_4+ & 2x_5 & = & b'_2 \\ & & & 6x_4- & 6x_5 & = & b'_3 \\ & & & & 0 & = & b'_4 \end{array} \right. ,$$

dove i b' sono certe espressioni nei parametri b.

- Per $b'_4 \neq 0$, il sistema e' impossibile.
- Per $b'_4 = 0$, il sistema ha soluzioni; precisamente, possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite

  $x_1, x_2, x_4,$

  riguardando le incognite x_3, x_5 come parametri, e il sistema e' indeterminato con soluzioni che dipendono da 2 parametri liberi.

Nel secondo caso, il sistema e' equivalente al sistema a scala ridotta

$$\begin{cases} x_1+ & & 4x_3+ & & x_5 & = & b_1'' \\ & x_2- & x_3+ & & 5x_5 & = & b_2'' \\ & & & x_4- & x_5 & = & b_3'' \end{cases},$$

dove i b'' sono certe espressioni nei parametri b.

Osserviamo che se $b_1, b_2, b_3, b_4 = 0$, si avra' pure $b_1', b_2', b_3', b_4' = 0$, ed il sistema avra' soluzione

$$\begin{cases} x_1 & = & -4x_3 - x_5 \\ x_2 & = & x_3 - 5x_5 \\ x_3 & = & qualsiasi \\ x_4 & = & x_5 \\ x_5 & = & qualsiasi \end{cases},$$

in altri termini

$$(-4p - q,\ p - 5q,\ p,\ q,\ q), \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

8. **Descrizione generale**

Sia dato un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$. Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

ed applichiamo a questa matrice l'algoritmo di Gauss, ottenendo cosi' una matrice a scala per righe, che sara' del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & \dots & 0 & a'_{1j_1} & & & & & & & & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & a'_{2j_2} & & & & & a'_{2n} & b'_2 \\
\vdots & & & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & & & \dots & & & \dots & 0 & a'_{pj_p} & \dots & a'_{pn} & b'_p \\
0 & \dots & & & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{p+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots
\end{array}\right],$$

con $a'_{1j_1}, a'_{2j_2}, \dots, a'_{pj_p} \neq 0$. A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
a'_{1j_1}x_{j_1}+ & \dots & & & +a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
& a'_{2j_2}x_{j_2}+ & \dots & & +a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
& & & & & \vdots & \\
& & a'_{pj_p}x_{j_p}+ & \dots & +a'_{pn}x_n & = & b'_p \\
& & & & 0 & = & b'_{p+1}
\end{array}\right.,$$

che e' equivalente al sistema dato.

- Se $b'_{p+1} \neq 0$, il sistema e' impossibile.
- Se $b'_{p+1} = 0$, allora il sistema ha soluzioni; precisamente,
  - per $p = n$, il sistema e' determinato;
  - per $p < n$ possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}$,
    riguardando le altre incognite come parametri, e il sistema e' indeterminato con soluzioni che dipendono da $n-p$ parametri liberi.

9. **Sistemi lineari con meno equazioni che incognite.**

Dalle considerazioni del punto precedente si ottiene la seguente

Proposizione 1. *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite con $m < n$ non e' mai determinato: e' impossibile, oppure e' indeterminato con soluzioni che dipendono da almeno $n - m$ parametri liberi.*

Dim. Con riferimento alla discussione svolta al punto precedente, per il numero p numero dei pivot si ha che $p \leq m$ (sostanzialmente per definizione di pivot) e $m < n$ per ipotesi; dunque $p < n$. Dalla discussione precedente segue allora che il sistema e' impossibile, o indeterminato con soluzioni che dipendono da $n-p$ parametri liberi; chiaramente si ha $n - p \geq n - m$. $\square$.

Un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$, nel quale tutti i termini noti siano nulli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

si dice *omogeneo.* Un tale sistema possiede sempre almeno una soluzione, la ennupla $(0, 0, \ldots, 0)$. Vale dunque la seguente

Proposizione 2. *Un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite con $m < n$ e' sempre indeterminato, con soluzioni che dipendono da almeno $n - m$ parametri liberi.*